UN PERCORSO TRA ARGOMENTAZIONE E DIMOSTRAZIONE MATEMATICA

ENRICO ROGORA

Abstract. Conferenze tenute il 5 e il 12 Novembre 2024 per l'Associazione culturale Antonio Rosmini di Trento

Le matematiche preelleniche e i loro aspetti rituali e applicativi.

1. Programma

- Le matematiche preelleniche e i loro aspetti rituali e applicativi.
- La matematica ellenica e i suoi rapporti con la retorica e la filosofia.
- La matematica ellenistica e i suoi rapporti con la scienza.

2. Aree geografiche

Atene – Mumbai	6550 km
Atene – Baghdad	3270 km
Atene – Il Cairo	3570 km
Roma – Siracusa	860 km
Siracusa – Capo nord	5100 km

3. The crest of the peacock

Gemme nascoste nelle matematiche antiche.

Prima degli anni settanta gli storici della matematica era sostanzialmente concordi nel ritenere

- Prima di Talete non esistevano argomentazioni matematiche.
- Prima di Euclide non esistevano dimostrazioni matematiche.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A60.

Key words and phrases. History of Mathematics, Mathematics Educatiom.

Nel corso degli ultimi anni, si è imposta tra gli storici della matematica una visione meno rigida, che riassumo così

- Matematiche preelleniche: evidenza geometrica ed evidenza numerica. Organizzazione dei calcoli e delle informazioni numeriche; organizzazione delle costruzioni geometriche, modularizzazione e generalizzazione di procedure costruttive,
- Matematica ellenica: argomentazione dialettica deduttiva
- Matematica ellenistica: dimostrazione matematica.

Queste affermazioni, pur essendo troppo nette, sono utili per comprendere meglio la dialettica dietro al complicato processo storico che ha dato forma alla dimostrazione matematica Euclidea. Tenere presente l'evoluzione e permettere agli studenti di ripercorrere le tappe principali di esse è a mio avviso di grande importanza nell'insegnamento (non solo della matematica).

4. Religiosità indiana

Cominciamo con l'antica matematica indiana, dove l'aspetto rituale è un motore importante del suo sviluppo e una sollecitazione molto forte ad affinare procedure e costruzioni esatte per facilitare il contatto tra uomo e Dio.

La religione in India è fondamentale fin dai tempi più remoti. Risulta essere il riferimento culturale essenziale anche per la scienza e per la matematica. Ci interessa mettere in luce alcuni elementi essenziali della cultura vedica da cui si sviluppa l'induismo.

5. Civiltà vedica

La civiltà vedica è la cultura associata alla popolazione del subcontinente indiano che compose i testi religiosi conosciuti come Veda. Questo periodo della storia dell'India, collocato tra la media età del bronzo e la media età del (1500 a.c. –500 a.c.), è conosciuto come età vedica. La civiltà vedica sostituisce la precedente civiltà della valle dell'Indo.

Il territorio allora occupato da quella civiltà corrisponde all'attuale regione del Punjab, tra India e Pakistan, alla Provincia della Frontiera del Nord Ovest del Pakistan e alla maggior parte dell'India settentrionale.

6. Ritualità vedica

I ritmi della vita "vedica" erano contraddistinti da una ritualità in cui l'elemento del fuoco (Agni - pron. aghnì) aveva un ruolo del tutto peculiare.

Il luogo del "sacrificio vedico" era delimitato e preparato con grande cura e precisione. Il sacrificio vedico poteva essere tuttavia celebrato in qualsiasi luogo scelto, il che si adattava alla vita seminomade degli antichi arii.

7. Shulba sutras

Le prescrizioni esatta della forma e dell'orientazione degli altari era contenuta in una serie di libri sacri, shulba sutras, cioè nei canti della corda. La corda era lo strumento fondamentale per la costruzione. analogo alla riga e al compasso dei greci, meno preciso ma teoricamente più potente:

- la rettificazione della circonferenza più in generale di qualsiasi curva, è immediata, da cui segue la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo;
- la costruzione delle sezioni coniche, quindi la duplicazione del cubo.

8. Altare di Agni

Fatto da tre fuochi, il rapporto tra le figure sovrapposte è ben definito.

9. Altare del Falcone

Perché la preghiera arrivi alla divinità, l'altare deve essere costruito ed orientato perfettamente.

10. Taglia e cuci

L'origine rituale della matematica spiega l'origine del problema della duplicazione del cubo e della quadratura del cerchio. Inoltre, affina il metodo della dissezione e ricombinazione, fondamentale per la geometria euclidea elementare.

11. Yantra

Amuleti magici. Forme geometriche perfette in relazione determinata.

12. Sri Yantra

Lo Śrīcakra (anche Śrīyantra) secondo lo Nityāṣoḍaśikārṇava. Questo yantra è proprio del culto della dea Tripurasundarī ("Bella dei tre mondi"), di cui esso rappresenta la forma cosmica, che la scuola tantra detta dello Śrīvidyā considera divinità suprema. È costituito dall'incrocio di due insieme di triangoli, quattro con i vertici indirizzati verso l'alto, a rappresentare il principio maschile, quindi Śiva, e cinque con i vertici rivolti verso il basso, che rappresentano Śakti, quindi il principio femminile. Lo Śrīcakra è modellato per offrire una visione della unitarietà dell'esistenza di cui fa parte lo stesso meditante.

13. Attività con GeoGebra sullo Yantra

https://www.geogebra.org/classroom/d9xskmp7

14. Il percorso argomentare e dimostrare

https://www.geogebra.org/classroom/z2qnputy

15. Matematica in Mesopotamia

Per *Matematica in Mesopotamia* intendiamo la matematica delle civiltà che si sono avvicendate nel corso dei secoli, tra il 3500 A.C. e il 300 D.C. nell'area intorno ai fiumi Tigri ed Eufrate, corrispondenti per la maggior parte all'odierno Iraq (Sumeri, Accadi, Babilonesi, Persiani). Testimonianze scritte di queste civiltà ci sono pervenute attraverso numerose tavolette di argilla incise con uno stilo (scrittura cuneiforme) e poi cotte nei forni. Molte di queste tavolette contengono registrazioni numeriche relative a merci o persone e calcoli. Le tavolette di contenuto matematico più interessanti si collocano in due periodi temporali distinti. Il primo, il più significativo per la storia della matematica, comincia intorno al 2000 A.Ce prende il nome di "babilonese antico", abbreviato OB (old babylonian). Il secondo, tra il 600 A.C. e il 300 D.C.

16. Il sistema di numerazione Babilonese

Il sistema di numerazione babilonese (i babilonesi conquistarono la Mesopotamia intorno al 2000 A.C.) è un sistema posizionale in base 60, che richiede due soli simboli per rappresentare tutti i numeri interi, grazie ad una modalità di rappresentazione dei numeri da 1 a 59 che usa la ripetizione di un simbolo per indicare le unità e la ripetizione dell'altro per indicare le decine (rivelando quindi anche tracce di un sistema "decimale", probabilmente utilizzato da alcune popolazioni indigene).

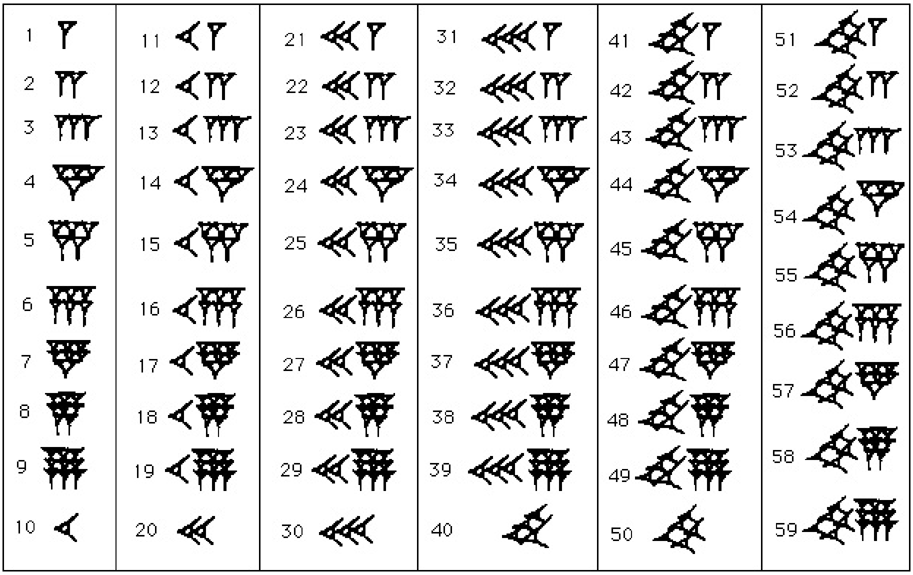


Figura 1 – Le cifre del sistema di numerazione babilonese sono solo due, quelle usate per 1 e 10. Componendo queste come mostrato nella figura si rappresentano tutti i numeri da 1 a 59. I numeri più grandi si rappresentano seguendo le regole della notazione posizionale. La mancanza di un simbolo per denotare lo zero, lascia una certa ambiguità nella rappresentazione dei numeri.

Per rappresentare i numeri in notazione sessagesimale, utilizzeremo la notazione

$$n_1, n_2, \ldots, n_k; m_1, \ldots, m_h \qquad 0 \leq n_i, m_j \leq 59$$

per indicare il numero

$$n_1 \cdot 60^{k-1} + n_2 \cdot 60^{k-2} + \cdots + n_k \cdot 60^0 + m_1 \cdot 60^{-1} + \cdots + m_h \cdot 60^{-h}.$$

Questa notazione, con l'uso del punto e virgola e la virgola per separare i multipli delle potenze successive risolve le ambiguità della notazione originale ma è un artefatto moderno. La distinzione tra parte intera e decimale di un numero non è documentata nelle tavolette.

17. Tavoletta Yale Babylonian Collection 7289

Uno dei documenti più interessanti della matematica babilonese è la tavoletta conservata nella collezione babilonese dell'università di Yale e indicata con il numero 7289. Si ritiene che la tavoletta si possa datare tra il 1880 a.c. e il 1600 a.c..

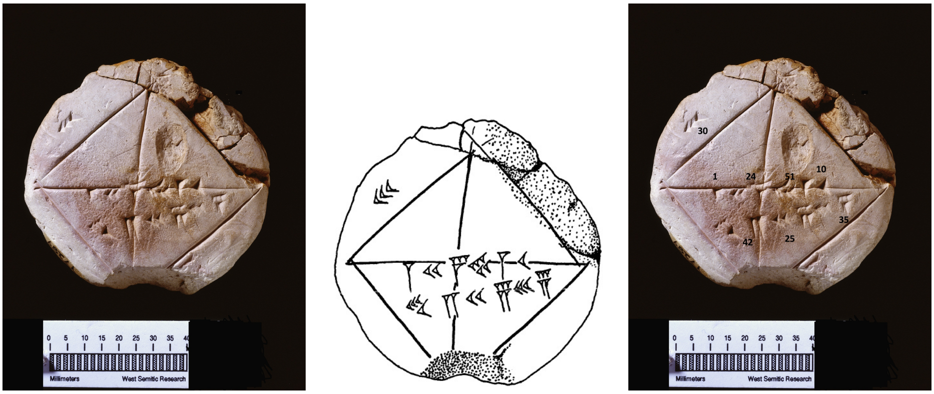


Figura 2 – A sinistra, una fotografia della tavoletta. In centro, una figura in cui appiano più chiaramente le cifre. A destra, la fotografia su cui sono state sovrapposte le rappresentazioni decimali dei numeri presenti.

Nella tavoletta sono riportati tre numeri che, in relazione alla figura che li accompagna, sono stati interpretati nella maniera seguente. La lunghezza del lato del quadrato (30), un'approssimazione alla terza cifra sessagesimale della radice di due (1;24,51,10) (esatta fino alla quinta cifra decimale) e la lunghezza (approssimata) della diagonale del quadrato (42;25,35=30 * 1;24,51,10). La tavoletta testimonia la conoscenza del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli e la capacità di calcolo approssimato delle radici quadrate.

18. Algoritmo dicotomico per il calcolo della radice

Non sappiamo quale procedura utilizzassero i Babilonesi per calcolare la radice quadrata di due. Particolarmente semplice e quindi plausibile, ci sembra quella che oggi indichiamo come procedura dicotomica per il calcolo approssimato della soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$.

: Passo 0 poniamo: $a = 1$, $b = 2$;
: Passo 1 calcoliamo $c = (a + b)/2$;
: Passo 2 se $c^2 - 2 < 0$, sostituiamo a con c altrimenti sostituiamo b con c;
: Passo 3 torniamo al Passo 1.

19. Tavoletta IM67118 del Museo Nazionale di Baghdad

Nella tavoletta IM 67118, conservata presso il Museo Nazionale di Baghdad, viene posto e risolto il seguente problema.

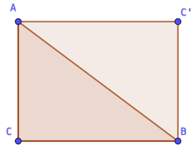
> *Determinare i lati di un rettangolo la cui area misura 45,0 e la cui diagonale misura 1,15.* [1]

Riportiamo una traduzione italiana della traduzione disponibile su Wikipedia. Le righe del testo corrispondono a quelle della tavoletta. Molte frasi si completano alla riga successiva, come dovrebbe risultare chiare dall'uso della punteggiatura. Usiamo la notazione di Neugebauer per rappresentare i numeri in notazione sessagesimale, utilizzando anche lo zero (che non compare nella tavoletta) per maggior chiarezza. In parentesi tonda abbiamo aggiunto del testo per rendere più comprensibile l'esposizione molto sintetica dell'originale. In parentesi quadra abbiamo aggiunto dei chiarimenti.

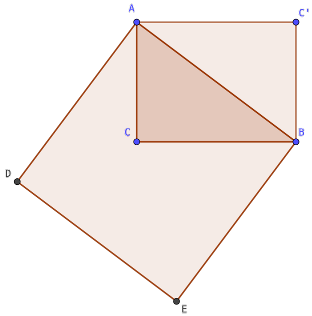
FRONTE

(1) Se, a proposito di una diagonale (di un rettangolo) vi si domanda
(2) così, 1,15 la diagonale, 45,0 la superficie; [il valore numerico dell'estensione di una figura la identifica nel seguito. Questo permette di riferirsi a una figura senza usare le lettere, come siamo abituati a fare.]
(3) lunghezza e larghezza corrispondono a cosa? Tu, per il tuo procedere

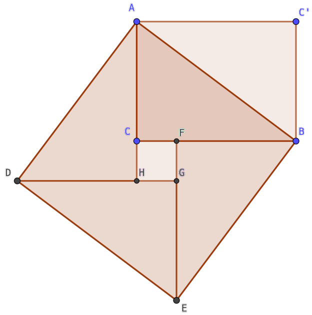
[1] I numeri sono scritti usando la convenzione di Neugebauer, che abbiamo discusso in precedenza.



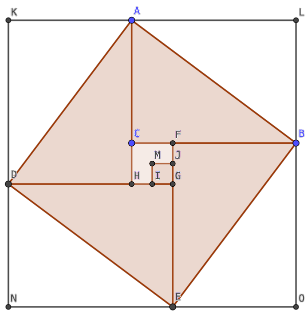
(4) estendi la diagonale 1,15 per la sua controparte [considera il quadrato sulla diagonale; la "controparte indica la direzione ortogonale, e non viene esplicitamente menzionata quando si trattadi direzioni parallele all'orizzontale o alla verticale]:
(5) valuta la sua estensione, viene 1,33,45



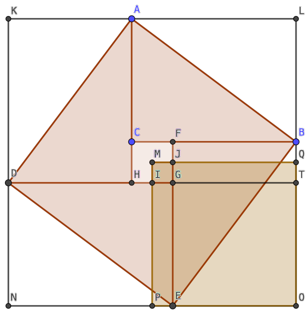
(6) puoi tenere in mano 1,33,45 [ricorda la figura e la sua estensione].
(7) la misura dell'estensione della tua superficie è 45,0. Raddoppiala e ottieni 1,30,0. [Si tratta dell'estensione dei quattro triangoli che appaiono in figura]



(8) Da(lla superficie che misura) 1,33,45 togli (la figura precedente che misura 1,30,0): La misura di ciò che rimane è 3,45. [Misura del quadrato CFHG]
(9) Prendi iI lato della figura 3,45 (che ha i lati uguali): La misura del lato è 15. La sua metà,
(10) misura 7;30. Innalza un quadrato sopra il lato di misura 7:30: (la misura del quadrato) risulta 56;15 [Si tratta della misura dell'estensione del quadrato più piccolo.]



(11) (Metti) 56;15 nella tua mano. (Aggiungi) la superficie (che misura) 45,0 sopra la tua mano [a quella che avevi già in mano],
(12) (viene una superficie che misura) 45,56;15. Il lato della superficie (che ha i lati uguali) e che misura 45,56;15:
(13) misura 52;30 [si tratta del lato MQ del quadrato scuro in basso a destra della figura]



(14) (il lato che misura) 7;30 che hai prodotto, ad uno (dei lati uguali che misurano 52;30)
(15) appendilo [7;30+52;30=1,0]. Da uno (dei lati uguali che misurano 52;30)
(16) toglilo [52;30-7;30=45]. 1,0 (è quindi) la tua lunghezza, 45 la tua ampiezza. [Con riferimento alla figura, attraverso delle operazioni di taglia e cuci sulle figure e di somme, prodotti, quadrati e estrazioni di radice, siamo riusciti a calcolare le lunghezze MQ e MJ e da queste calcoliamo la larghezza MQ-MJ e l'altezza MQ+MJ].

(17) ...

[La tavoletta prosegue, anche sul retro, con la verifica che i valori ottenuti risolvono il problema e riporta anche una figura poco esplicativa. L'ipotesi che la risoluzione fosse illustrata/motivata da operazioni geometriche presuppone l'uso di uno strumento diverso dalla tavoletta su cui fare i disegni.].

Il metodo risolutivo esposto nella tavoletta può essere illustrato con la notazione algebrica. Nella tavoletta non appaiono le espressioni letterali che abbiamo riportato nel seguito a sinistra delle uguaglianze ma solo numeri e indicazioni per operare calcoli numerici. Da ciò non segue necessariamente che i matematici babilonesi operassero a livello puramente algebrico, come è stato inizialmente supposto da molti. Lo storico della matematica danese Jens Høyrup, attraverso una meticolosa analisi dei termini utilizzati nelle tavolette ha proposto invece che l'intero procedimento fosse guidato da un'intuizione essenzialmente geometrica. L'assenza delle figure nelle tavolette, che ha sottovalutato l'interpretazione geometrica a favore di una interpretazione algebrica del modo di ragionare dei babilonesi, si spiega facilmente con la supposta esistenza di supporti diversi sui quali eseguire i calcoli. È stata proposta l'esistenza di tavolette di sabbia su cui eseguire facilmente i disegni necessari e altrettanto facilmente cancellarli. Nessuna evidenza archeologica di tali strumenti ci è però pervenuta.

Riteniamo comunque utile, anche in vista dell'elaborazione di percorsi didattici che affrontino da più punti di vista alcuni dei problemi considerati dai matematici babilonesi, collegandoli all'insegnamento dell'algebra, offrire anche un'interpretazione puramente algebrica che utilizza espressioni letterali che per noi risultano essere molto efficaci per sintetizzare i calcoli svolti e mettono in luce la potenza del calcolo algebrico che elimina la necessitò dell'interpretazione geometrica e del controllo geometrico su ciò che si sta facendo.

- $xy = 45, 0$. Calcola $2xy = 1, 30, 00$.
- Sottrai l'espressione precedente da $x^2 + y^2 = (Pitagora) = 1, 33, 45$ in modo da avere $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 3, 45$.
- Estrai la radice quadrata in modo da avere $x - y = 15$.
- Dividi per 2 per avere $\frac{x-y}{2} = 7; 30$.
- Dividi $x^2 + y^2 - 2xy = 3, 45$ per 4 per ottenere
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} = 56; 15.$$
- Aggiungi $xy = 45, 0$ per avere
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} = 45, 56; 15.$$
- Estrai la radice quadrata in modo da avere
$$\frac{x + y}{2} = 52; 30.$$
- Aggiungi $\frac{x+y}{2} = 52; 30$ a $\frac{x-y}{2} = 7; 30$ per ottenere $x = 1, 0$.
- Sottrai $\frac{x-y}{2} = 7; 30$ a $\frac{x+y}{2} = 52; 30$ per ottenere $y = 45$.
- Quindi, il rettangolo ha lati $x = 1, 0$ e $y = 45$.

Sia l'interpretazione geometrica sia quella algebrica presuppongono una sensibilità all'argomentare maggiore di quella presupposta da una semplice esecuzione di calcoli guidati dalla ripetizione di casi analoghi o da semplici ricette numeriche quali la procedura dicotomica per l'approssimazione di una radice quadrata. Qualcosa in base a cui "spiegare il procedimento". Ci sembra d'altra parte difficile sostenere un approccio puramente aritmetico alla soluzione di problemi di questo genere, come invece è possibile nell'affrontare problemi quale quello di determinare lunghezza e larghezza di un rettangolo di cui sono assegnate la somma e il prodotto (cfr. la seconda attività del percorso "argomentare e dimostrare").

20. Tabella dei quadrati

Un aspetto caratteristico relativo alle modalità di calcolo dei Babilonesi riguarda l'uso di tabelle numeriche che sostituiscono e vanno oltre la tavola pitagorica. Una tavoletta risalente al 2000 A.C. rinvenuta a Senkerah riporta i quadrati dei numeri da 1 a 59.

Le regole

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

e

$$ab = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2}$$

(che hanno una evidente interpretazione geometrica) permette di calcolare un prodotto usando la tavola dei quadrati, la sottrazione e la divisione per quattro o per 2. La tavoletta di Senkerah sostituisce quindi, per l'aritmetica in base 60, l'uso della tavola pitagorica per la moltiplicazione.

1	1	13	2,49
2	4	14	3,16
3	9	15	3,45
4	16	16	4,16
5	25	17	4,49
6	36	18	5,24
7	49	19	6,1
8	1,4	20	6,40
9	1,21	21	7,21
10	1,40	22	8,4
11	2,1	23	8,48
12	2,24	24	9,6

Tabella dei quadrati dei primi 24 numeri naturali.

21. Tabella degli inversi

Per quanto riguarda la divisione, i babilonesi usavano tavole per i reciproci dei numeri del tipo $2^m 3^n 5^p$ e la regola $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

2	0; 30
3	0; 20
4	0; 15
5	0; 12
6	0; 10
8	0; 7, 30
9	0; 6, 40
10	0; 6
12	0; 5
15	0; 4
16	0; 3, 45
18	0; 3, 20
20	0; 3
24	0; 2, 30
25	0; 2, 24
27	0; 2, 13, 20

Tabella degli inversi dei primi sedici numeri naturali della forma $2^m 3^n 5^p$.

Se l'inverso del numero b non appare nelle tabelle, ne sceglievano un'approssimazione. Per esempio

$$\frac{1}{13} = \frac{7}{91} \sim 7 \times \frac{1}{90} = 7 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{9}.$$

22. Tavoletta BM92698

I matematici babilonesi svilupparono procedure per ricondursi all'uso di tabelle di interi. Per esempio, per risolvere l'equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 = c$$

essi, usando ancora una volta un linguaggio formale che non conoscevano e che sostituivano probabilmente con descrizioni verbali che insegnassero a convertire in algoritmi le informazioni contenute in tabelle numeriche opportunamente strutturate, moltiplicavano per a^2 e dividevano per b^3 ottenendo (utilizzando le notazioni moderne)

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}.$$

Ponendo $y = ax/b$ l'equazione originale si trasforma in $y^3 + x^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, che si può risolvere, in generale in modo approssimato, utilizzando le tabelle per i quadrati e per i cubi. Da una soluzione si può risalire ad una soluzione, in generale approssimata, dell'equazione originale $x = by/a$.

23. Problemi di secondo grado

Molti semplici problemi geometrici portano alla considerazione di equazioni di secondo grado. Per esempio, un problema tratto in un'antica tavoletta chiede di determinare lunghezza e larghezza di un rettangolo in cui la lunghezza eccede la larghezza di 7 e l'area è pari a 1,0. Usando il linguaggio dell'algebra moderna, si tratta di calcolare la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $x^2 + 7x = 1,0$ per ottenere la larghezza richiesta. La procedura descritta dallo scriba per giungere alla soluzione è la seguente: calcola la metà di 7, cioè 3;30, quadra il risultato per ottenere 12;15. Aggiungi 1,0 per ottenere 1,12;15. Estrai la radice quadrata (utilizzando una tavola dei quadrati) per ottenere 8;30. Da ciò sottrai 3;30 per ottenere la risposta 5 per la larghezza cercata. Si tratta degli stessi calcoli che si devono fare utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. In questo senso, la procedura è equivalente alla formula risolutiva.

$$x = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}\right) - \frac{b}{2}$$

per l'equazione $x^2 + bx = c$.

> *We should be careful not to read into early mathematics ideas which we can see clearly today yet which were never in the mind of the author. Conversely we must be careful not to underestimate the significance of the mathematics just because it has been produced by mathematicians who thought very differently from today's mathematicians.* (cfr. MacTutor: Babylonian Pythagoras, [?])

Si osservi che manca nella matematica babilonese la notazione algebrica e il calcolo algebrico che permette di dimostrare la formula. Secondo molti storici, manca anche, almeno per quanto ne sappiamo, l'esigenza di fornire una dimostrazione della correttezza della procedura risolutiva, anche se le osservazioni di Høyrup sull'interpretazione geometrica dei calcoli numerici eseguiti sulle tavolette mette in discussione, a nostro avviso, queste assunto aprendo la possibilità di una giustificazione per evidenza geometrica di alcune operazioni, diversa dalla sola giustificazione per tentativi ed errori.

24. Kline, sulla Matematica Babilonese

L'uso da parte dei Babilonesi di termini speciali e di simboli per le incognite, il loro impiego di alcuni simboli per le operazioni, e la loro soluzione di alcuni tipi di equazioni in una o più incognite, specialmente equazioni quadratiche, si può considerare un primo passo nella direzione dell'algebra. Il modo sistematico che svilupparono per scrivere i numeri interi e le frazioni, gli permise di portare l'aritmetica ad un livello piuttosto avanzato e di farne uso efficace in molte situazioni pratiche, specialmente in astronomia. Erano in possesso di abilità numeriche e di certe abilità che potremmo definire algebriche, ma nel complesso la loro aritmetica e la loro algebra erano molto elementari. Anche se lavoravano con numeri e problemi concreti, evidenziavano una comprensione parziale della matematica astratta nel riconoscere che alcune procedure erano tipiche di certe classi di equazioni. Si pone la questione di comprendere fino a che punto i Babilonesi facevano uso della dimostrazione matematica. Essi risolsero con procedure sistematiche corrette equazioni piuttosto complicate con più incognite. Però, fornivano istruzioni verbali solo sui passi da compiere, senza offrire alcuna giustificazione. Quasi certamente i processi aritmetici e algebrici e le regole geometriche erano il risultato finale di evidenze fisiche, tentativi ed errori, intuizioni. Che i metodi funzionassero era, per i babilonesi, giustificazione per il loro uso: il concetto di dimostrazione, la nozione di una struttura

> *logica basata su principi che garantiscano l'accettazione di un principio piuttosto che un altro, e la considerazione di questioni del tipo "sotto quali condizioni possono esistere soluzioni a certi problemi", non trovano spazio nella matematica dei Babilonesi.*

Dovremmo dire più correttamente che le giustificazioni dei metodi non sono documentate. Quindi, le affermazioni di Kline sono certamente plausibili ma non certe ed esiste spazio per una ricostruzione e un giudizio meno critico sui contenuti della matematica mesopotamica e babilonese.

25. Friberg, sulla Matematica Babilonese

A questo proposito mi sembra opportuno citare un lungo brano di uno dei principali studiosi contemporanei della matematica mesopotamica.

> ≪*Fin dagli inizi nel periodo degli esordi della scrittura alla fine del IV millennio, e per tutta la sua storia, la matematica mesopotamica sembra orientata verso le applicazioni; essa aveva lo scopo di insegnare a futuri scribi e amministratori come trattare in modo efficace e corretto calcoli complicati con numeri e misure espresse in tutti i diversi sistemi cuneiformi di notazione. A quanto pare, la geometria non era studiata per sé stessa, ma soltanto perché era una fonte di problemi interessanti che sollecitavano l'intuizione visiva. Non c'è traccia di impostazione assiomatica nella geometria babilonese; non sono mai dati né definizioni né assiomi e né enunciati o dimostrati teoremi. Vi sono tuttavia molte indicazioni che mostrano come la matematica, e in particolare la geometria, fossero insegnate in modo metodico nelle scuole paleobabilonesi (...) la matematica babilonese scelse di operare sulla base di testi tematici*[2] *contenenti problemi di complessità gradualmente crescente: in un certo senso ciò costituisce un metodo deduttivo, benché diverso dall'impostazione assiomatica, basata su*

[2] [1] ≪In un 'testo tematico' sono dati esempi di complessità crescente di un'idea matematica, il tema, appunto.≫

definizioni, assiomi, teoremi e dimostrazioni, tipica della geometria greca. Inoltre nella matematica babilonese si ha spesso una verifica delle risposte ottenute≫

≪*I primi geometri greci, che avevano probabilmente familiarità con gran parte della tradizione matematica mesopotamica, trasformarono completamente questa eredità intellettuale. Forse a causa della scoperta delle grandezze incommensurabili essi rifiutarono i metodi dei loro predecessori, anche se non i risultati che questi avevano ottenuto. Le dimostrazioni rigorose basate su definizioni astratte e su assiomi assunsero il ruolo che nella matematica babilonese aveva il metodo, concettualmente più semplice, di ripercorrere all'inverso un algoritmo con valori numerici dati per controllare i valori ottenuti. In questa prospettiva, varie parti degli Elementi di Euclide si possono considerare tentativi di dimostrare come una parte consistente dell'algebra delle misure, della geometria e della teoria dei numeri babilonesi potesse rientrare nel quadro non numerico della matematica greca. Un esempio che dimostra come si sia ottenuta questa trasformazione è la riformulazione di alcuni punti fondamentali dell'algebra 'metrica' babilonese contenuta nel Libro II degli Elementi. (...) Per esempio, la figura che illustra la prop. 14 [del Libro II] si può spiegare come una soluzione costruttiva del problema di trovare due lati quando sono noti il loro prodotto (come dire l'area del rettangolo costruito con essi) e la loro somma (Euclide considera in realtà un problema leggermente diverso, ma la figura e l'idea sono le stesse).*≫

La matematica ellenica e i suoi rapporti con la retorica e la filosofia

26. La civiltà della polis

Tra il VII e il VI secolo avanti Cristo, si afferma in Grecia *la civiltà delle polis* che presenta elementi di dinamicità nuovi rispetto alle civiltà dei grandi imperi dell'Egitto e della Persia, caratterizzati da un forte potere centrale e da una dinamica sociale molto ridotta. In Grecia ogni città è indipendente dalle altre e, all'interno di ogni città, il potere viene condiviso da una cerchia, seppur ristretta, di persone che deve discutere per prendere le decisioni. Si tratta di una minoranza, sufficiente però a stimolare la pratica del confronto democratico, dove il prevalere di un'opinione non è più solo determinato dai rapporti di forza ma anche dalla capacità di persuasione. Questa pratica di mettere in discussione le opinioni altrui per affermare le proprie è il terreno fertile entro cui si sviluppano la filosofia, la scienza e la matematica argomentativa.

27. La nascita della scienza

In Egitto e in Mesopotamia un lento e continuo progresso tecnologico, basato sull'accumulo e all'ordinamento di conoscenze empiriche, aveva permesso di raggiungere importanti traguardi in molti campi, ma non esistevano le scienze come le intendiamo oggi: corpi organici di conoscenze organizzate in base a principi teorici e metodologici il cui sviluppo si basa anche sul confronto con il pensiero degli altri scienziati.

28. Dal mito alla scienza: l'affermarsi del pensiero razionale

La prime domande che si pongono la scienza e la filosofia greca sono del tipo: Come si è potuto formare il nostro universo a partire dal caos?

I primi tentativi di risposta dei filosofi milesi traspongono su un piano astratto le spiegazioni del mondo che proponevano le mitologie antiche. La struttura delle loro descrizioni dell'universo corrisponde ancora a quella dei miti: dopo uno stato indistinto e di confusione dove tutte le cose sono mescolate, emergono le differenziazioni in coppie di qualità opposte: caldo e freddo, secco e umido, che poi interagiscono, risultando ciascuno provvisoriamente e alternativamente vincitore e vinto.

29. Talete

Talete il fondatore della scuola ionica, e considerato il fondatore della matematica greca, crea una teoria cosmologica che spiega il divenire dell'Universo a partire da una sola sostanza primordiale, l'acqua, suscettibile di trasformarsi in tutte le altre. Per condensazione, l'acqua forma i corpi solidi; per evaporazione l'aria e ciò che genera il fuoco. Ma l'acqua non è solo elemento costitutivo, è anche supporto: la nostra terra si appoggia sulla sua massa infinita che l'inviluppa da tutte le parti.

30. Anassimandro

Per Anassimandro (610 – 547), allievo di Talete, il principio delle cose non è più un elemento materiale, ma è *l'apeiron*, l'indeterminato, l'illimitato, pensato come contenitore di tutti i corpi; tutti i corpi si trovano fusi insieme ed è dall'organizzazione di questo caos infinito che nascono i mondi.

> *Alcuni affermano che la terra sta dove è a causa di un principio di indifferenza. Tale è, tra gli antichi, Anassimandro. Perché ciò che è situato nel centro e ad uguale distanza dalle estremità non ha inclinazione qualsivoglia a muoversi verso l'alto piuttosto che verso il basso o verso un lato piuttosto che verso un altro; e siccome è impossibile muoversi in direzioni opposte nello stesso tempo, è necessario che stia dov'è.* (Aristotele)

31. Considerazioni su Anassimandro

Tutte le civiltà umane hanno sempre pensato che il mondo fosse fatto di cielo sopra e Terra sotto. Sotto la Terra, perché non caschi, ci deve essere altra terra; oppure una grande tartaruga appoggiata su un elefante come in alcuni miti asiatici, o gigantesche colonne come quelle di cui parla la Bibbia. Questa immagine del mondo è condivisa dalle civiltà egizia, cinese, maya, dell'antica India e dell'Africa nera, dagli Ebrei della Bibbia, dagli Indiani del Nord America, dagli antichi imperi di Babilonia e da tutte le altre culture di cui abbiamo traccia. Tutte eccetto una: la civiltà greca. (Rovelli)

Nel pensiero di Anassimandro, nella sua ribellione contro certezze che appaiono ovvie e nell'affidarsi alla ragione per costruire nuove spiegazioni, scorgiamo i primi barlumi caratteristici della filosofia razionale e del pensiero scientifico. Non tutti, naturalmente. Manca l'idea di descrivere i fenomeni con leggi matematiche (che comparirà nella scuola pitagorica) e quella di esperimento, per collegare, in entrambi i versi, teoria e realtà.

32. Demos

In queste prime concezioni filosofiche, molti studiosi vedono il riflesso delle condizioni sociali della città, che subiscono una profonda mutazione nel corso del sesto secolo. È intorno al 600 a. C., dopo una aspra lotta tra gli aristocratici e gli artigiani che i "cittadini" (Demos) accedono alla libertà e al potere.

L'avvento del pensiero astratto corrisponde, sul piano politico, alla messa in atto del principio di libertà e sovranità del popolo, e, sul piano sociale, a un periodo di profondi rivolgimenti. Una cerchia di intellettuali medici, retori e philosophoi (amanti di saggezza, nei quali si possono vedere i veri specialisti del sapere) si afferma. Il sapere acquisito non è tuttavia la proprietà esclusiva di questa sola cerchia ma, attraverso il dibattito pubblico, diviene il bene comune di tutti i cittadini.

33. Agone

Uno dei tratti caratteristici della società greca, anche arcaica, è l'agone, la rivalità, il combattimento, di cui i giochi olimpici costituiscono una forma pacifica. L'uomo greco ama suscitare situazioni conflittuali e opporsi a forze concorrenti; cerca un avversario che gli permetta di affermare e consolidare le sue opinioni. Al fine di prevalere sull'altro, è capace di difendere posizioni estreme. Si riconosce questo stesso spirito nella predilezione dei greci per i giochi oratori e nella loro abilità di perfezionare le tecniche retoriche.

La civiltà greca classica è una «civiltà della parola», nella quale i sistemi di spiegazione del mondo, non possono più esprimersi nel linguaggio dei miti, ma devono presentarsi nella forma di problemi da sottoporre alla discussione e suscettibili di risposte affermative o negative.

34. Matematica argomentativa

Oggetto di discussione diventano anche le definizioni e le proposizioni matematiche. Le proposizioni non sono più semplici enunciati che traducono dei fatti empirici euristicamente o sperimentalmente evidenti ma necessitano d'ora in poi di una deduzione che conduca, da una o da più proposizioni (premesse) a una conclusione necessaria.

35. Algoritmi e strutture. Costruzioni e proprietà.

Nella matematica antica, algoritmi di calcolo numerico e costruzioni geometriche erano al centro degli interessi di chi si occupava di matematica. I numeri e le figure stavano, in un certo senso, dentro le cose.

Algoritmi e costruzioni operano su oggetti che rappresentano numeri e figure (palline di un abaco, disegni realizzati con strumenti opportuni).

Non era necessaria un'evidenza argomentativo –deduttiva ma era sufficiente una evidenza di carattere algoritmico o figurale.

Se la cosa ci sembra innaturale, chiediamoci: quando mai ci capita di dimostrare l'esattezza di un programma al calcolatore? Quando mai sentiamo l'urgenza di dimostrare l'esattezza di una costruzione fatta con un software di geometria dinamica.

36. Deduzioni

A un certo momento, in un contesto geografico e culturale ben preciso, quello della civiltà delle polis, comincia ad affermarsi l'interesse per una matematica in cui gli oggetti e le relazioni tra essi cominciano a spostandosi su un piano più astratto. Si formalizzano le definizioni e le proposizioni e si cerca di collegarle tramite catene di deduzioni. In questa fase, le reti di deduzioni che collegano le proposizioni sono dinamiche e la struttura globale delle reti non è organizzata né ottimizzata.

37. Dimostrazioni

L'ultima fase prevede un'organizzazione stabile e quanto più possibile ottimizzata della rete delle deduzioni. Ogni proposizione è una foglia di un albero che affonda le sue radici in un piccolo insieme di assiomi. Si lavora per eliminare i cicli, per ridurre i postulati e per sceglierli della forma più semplice evidente e verificabile.

38. Il percorso didattico

Il percorso didattico è stato progettato per guidare l'esperienza degli studenti attraverso queste tre fasi della matematica (matematica dell'artista e dell'artigiano; matematica del filosofo e del fisico; matematica del logico e del matematico).

Dopo le attività sulla matematica vedica e su quella babilonese, volte a far riflettere su un modo di fare matematica che privilegia l'intuizione geometrica e algoritmica, sono previste alcune attività mirate a cogliere lo spirito della matematica ellenica e a riflettere sulle ragione dello sviluppo della matematica argomentativa e sui collegamenta con la retorica e la filosofia.

39. Le forme del confronto democratico.

Nella terza attività ci si confronta con la pratica del dibattito argomentativo come metodo di confronto democratico nella società greca.

Dopo una prima fase di approfondimento, gli allievi si cimentano in attività di dibattito argomentativo su tematiche relative ai rapporti tra scienza e società.

La dialettica di Platone, come metodo della ricerca filosofica, e la retorica di Aristotele, come scienza della persuasione, vengono illustrate con riferimento a un'attività di dibattito argomentativo.

40. Carattere argomentativo della matematica greca.

Nel quarto incontro si affronta il problema della definizione.

A partire dall'esigenza di precisare le definizioni dei termini impiegati nell'uso quotidiano della lingua per comunicare, si confrontano le definizioni sul vocabolario con quelle della matematica e della filosofia mettendo in evidenza lo scopo e la natura diversa della definizione in modo da facilitare la comprensione del ruolo specifico della definizione matematica e aiutare lo studente a superare le difficoltà di apprendimento connesse.

L'attività ruota intorno al problema della definizione di figura con riferimento al Menone e a una attività sulle figure del Tangram ispirata a Lakatos.

Nel nostro percorso il Menone viene utilizzato come spunto per riflettere su varie tipologie di definizione: del vocabolario, in filosofia, in matematica e confrontarle con quelle proposte dai ragazzi nella parte dell'attività relativa al conteggio delle figure del Tangram.

Inoltre, viene usato per fornire un esempio di dialogo scientifico cui ispirarsi per scrivere i dialoghi richiesti agli studenti e ai docenti durante il percorso.

Infine ci è servito in quanto presenta una semplice dimostrazione del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli, a partire dalla quale abbiamo costruito un video con una dimostrazione proposta ai ragazzi.

41. Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora.

Nel quinto incontro focalizziamo l'attenzione su tre domande:

- Cos'è una dimostrazione?
- Come si dimostra?
- Perché si dimostra?

Non diamo le risposte ma suggeriamo attività per chiarire il significato delle domande e acquisire strumenti per poter rispondere.

Cominciamo presentando cinque filmati con cinque "dimostrazioni" del teorema di Pitagora.

Ogni filmato è stato scelto per mettere in evidenza diverse caratteristiche delle argomentazioni proposte per aiutare la classe a capire cosa manca in ognuna di esse dal punto di vista logico e argomentativo. Sinteticamente. le ragioni per la scelta di ognuno di questi filmati sono le seguenti:

- *Verifica idraulica (Pitagora 1).* Non si tratta di un argomentazione matematica ma semplicemente di una verifica sperimentale di un caso particolare. La verifica, inoltre, si basa su numerose assunzioni implicite che vengono accettate senza soffermarsi. Per esempio, che lo spessore dei recipienti sia uguale.
- *Verifica geometrica. (Pitagora 3)* Anche in questo caso l' argomento si riferisce a un caso particolare cioè al triangolo rettangolo di lati di lunghezza proporzionale ai numeri 3, 4 e 5. L'argomento geometrico proposto, cioè la suddivisione dei quadrati in quadrati più piccoli non ha validità generale.
- *Argomento di Perigal (Pitagora 2)* La giustificazione è euristica e non deduttiva. La richiesta di scrivere un dialogo maieutico

intorno a questa giustificazione, serve per aiutare la classe a cambiare il punto di vista sugli oggetti matematici e sulla necessità di argomentare le proprie deduzioni in un contesto di "agorà matematica"
- *Argomento di Leisnez (Pitagora 4).* La giustificazione è euristica e non deduttiva. Anche per questa argomentazione è stato chiesto alla classe di scrivere un dialogo maieutico.

42. Argomento fallace (non presente nelle classi GeoGebra)

Questo argomento modifica una dimostrazione da noi elaborata a conclusione del lavoro fatto sul Menone. Questa dimostrazione si presta a introdurre un argomento fallace che non è immediato individuare. Inoltre ha un carattere più formale delle precedenti e quindi è stata scelta perché è più vicina all'idea di dimostrazione "incomprensibile" che hanno gli studenti. Infatti, come ci aspettavamo, non pochi l'hanno indicata come quella più rigorosa e sono rimasti sorpresi dal fatto che fosse la più sbagliata.

L'aggiustamento della dimostrazione errata che abbiamo proposto dimostrazione non è una dimostrazione consigliabile del teorema di Pitagora perché è troppo complicata, ma ci ha offerto un utile spunto per diverse discussioni.

Innanzitutto, è un esempio di come fidarsi di quello che si vede può essere ingannevole.

Poi suggerisce di non affidarsi al formalismo nelle dimostrazioni ma di controllarlo sempre con l'intuizione e con la ricerca di dimostrazioni più semplici e più facilmente verificabili.

Inoltre, mette in evidenza come sia importante imparare ad analizzare gli errori, che spesso possono suggerire modifiche per ottenere la soluzione di un problema o la dimostrazione di un teorema. Ciò stimola pazienza, fiducia e perseveranza, caratteristiche indispensabili per fare matematica.

L'analisi dei filmati ha riguardato anche una discussione sui pregi e sui limiti comunicativi. Questi aspetti sono a nostro avviso di grande importanza nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica e devono essere trattati prestando particolare attenzione a mettere in luce le insidie di una comunicazione superficiale che non stimola la riflessione. È risultato particolarmente utile discutere gli aspetti comunicativi dei filmati proposti con la copresenza degli insegnanti di matematica, filosofia, lettere, storia e inglese.

43. Un filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora.

Nella sesta attività abbiamo la classe in gruppi di tre/quattro studenti e abbiamo chiesto ad ogni gruppo di preparare un filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora. A metà dei gruppi è stato chiesto di elaborare tutti i dettagli dell'argomento di Leisnez, all'altra metà di quello di Perigal. Abbiamo chiesto di illustrare le costruzioni con il software di geometria dinamica utilizzato nelle precedenti attività e di presentare le argomentazioni nella forma di dialogo, che abbiamo fatto praticare agli studenti nella prima, seconda e quarta attività

Al termine dell'attività ogni gruppo ha prodotto un filmato di circa 5 minuti e la trascrizione della sceneggiatura.

Ogni gruppo ha ricevuto un *report* scritto dettagliato report sul lavoro svolto, preparato dagli insegnanti che hanno visionato e discusso ogni filmato con attenzione.

Gli insegnanti hanno quindi diviso la classe in due gruppi a ognuno dei quali è stato richiesto di preparare un nuovo filmato con la dimostrazione di Leisnez e uno della dimostrazione di Perigal che tenesse conto delle valutazioni contenute nei *report*, in preparazione alla successiva attività.

La richiesta di costruire un filmato è stata posta agli studenti con la convinzione che il lavoro di progettazione ed realizzazione di un oggetto digitale potesse risultare particolarmente utile per affinare le competenze argomentative. comunicative e di lavoro collaborativo e a sperimentare la costruzione della rete di relazioni tra le proposizioni matematiche che abbiamo descritto in precedenza.

Abbiamo osservato come questa richiesta abbia effettivamente stimolato gli studenti a interrogarsi su come e cosa dimostrare e a confrontare le proprie opinioni a riguardo.

44. Una testimonianza di un partecipante al laboratorio

Nel tema proposto dalla professoressa di italiano al termine del percorso, in cui veniva richiesto un consuntivo dell'esperienza fatta, una studentessa ha scritto:

Non scorderò mai le quattro giornate della settimana dello studente che ho passato in aula studio cercando di capire come sviluppare da zero una dimostrazione abbastanza complessa. Come non scorderò le ore spese nella mia camera a registrare il primo video. (...) Queste attività mi hanno insegnato ad apprezzare le formule e le dimostrazioni che incontro tutti i giorni. (...) Per questo posso dire che il mio rapporto con la matematica è cambiato. (...) Oggi la considero un'arte ricchissima la cui bellezza però è difficile da cogliere senza ripercorrere interamente la sua storia. (...) Il confronto sulle dimostrazioni che ho avuto con gli altri elementi del mio gruppo e poi con tutta la classe è stato avvincente. Sono rimasta stupita che ci siamo fatti tutti coinvolgere.