UN PERCORSO TRA ARGOMENTAZIONE E DIMOSTRAZIONE MATEMATICA

ENRICO ROGORA

Abstract. Conferenze tenute il 5 e il 12 Novembre 2024 per l'Associazione culturale Antonio Rosmini di Trento

Le matematiche preelleniche e i loro aspetti rituali e applicativi.

1. Programma

- Le matematiche preelleniche e i loro aspetti rituali e applicativi.
- La matematica ellenica e i suoi rapporti con la retorica e la filosofia.
- La matematica ellenistica e i suoi rapporti con la scienza.

2. Aree geografiche

Atene – Mumbai	6550 km
Atene – Baghdad	3270 km
Atene – Il Cairo	3570 km
Roma – Siracusa	860 km
Siracusa – Capo nord	5100 km

3. The crest of the peacock

Gemme nascoste nelle matematiche antiche.

Prima degli anni settanta gli storici della matematica era sostanzialmente concordi nel ritenere

- Prima di Talete non esistevano argomentazioni matematiche.
- Prima di Euclide non esistevano dimostrazioni matematiche.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A60.

Key words and phrases. History of Mathematics, Mathematics Educatiom.

Nel corso degli ultimi anni, si è imposta tra gli storici della matematica una visione meno rigida, che riassumo così

- Matematiche preelleniche: evidenza geometrica ed evidenza numerica. Organizzazione dei calcoli e delle informazioni numeriche; organizzazione delle costruzioni geometriche, modularizzazione e generalizzazione di procedure costruttive,
- Matematica ellenica: argomentazione dialettica deduttiva
- Matematica ellenistica: dimostrazione matematica.

Queste affermazioni, pur essendo troppo nette, sono utili per comprendere meglio la dialettica dietro al complicato processo storico che ha dato forma alla dimostrazione matematica Euclidea. Tenere presente l'evoluzione e permettere agli studenti di ripercorrere le tappe principali di esse è a mio avviso di grande importanza nell'insegnamento (non solo della matematica).

4. Religiosità indiana

Cominciamo con l'antica matematica indiana, dove l'aspetto rituale è un motore importante del suo sviluppo e una sollecitazione molto forte ad affinare procedure e costruzioni esatte per facilitare il contatto tra uomo e Dio.

La religione in India è fondamentale fin dai tempi più remoti. Risulta essere il riferimento culturale essenziale anche per la scienza e per la matematica. Ci interessa mettere in luce alcuni elementi essenziali della cultura vedica da cui si sviluppa l'induismo.

5. Civiltà vedica

La civiltà vedica è la cultura associata alla popolazione del subcontinente indiano che compose i testi religiosi conosciuti come Veda. Questo periodo della storia dell'India, collocato tra la media età del bronzo e la media età del (1500 a.c. –500 a.c.), è conosciuto come età vedica. La civiltà vedica sostituisce la precedente civiltà della valle dell'Indo.

Il territorio allora occupato da quella civiltà corrisponde all'attuale regione del Punjab, tra India e Pakistan, alla Provincia della Frontiera del Nord Ovest del Pakistan e alla maggior parte dell'India settentrionale.

6. Ritualità vedica

I ritmi della vita "vedica" erano contraddistinti da una ritualità in cui l'elemento del fuoco (Agni - pron. aghnì) aveva un ruolo del tutto peculiare.

Il luogo del "sacrificio vedico" era delimitato e preparato con grande cura e precisione. Il sacrificio vedico poteva essere tuttavia celebrato in qualsiasi luogo scelto, il che si adattava alla vita seminomade degli antichi arii.

7. Shulba sutras

Le prescrizioni esatta della forma e dell'orientazione degli altari era contenuta in una serie di libri sacri, shulba sutras, cioè nei canti della corda. La corda era lo strumento fondamentale per la costruzione. analogo alla riga e al compasso dei greci, meno preciso ma teoricamente più potente:

- la rettificazione della circonferenza più in generale di qualsiasi curva, è immediata, da cui segue la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo;
- la costruzione delle sezioni coniche, quindi la duplicazione del cubo.

8. Altare di Agni

Fatto da tre fuochi, il rapporto tra le figure sovrapposte è ben definito.

9. Altare del Falcone

Perché la preghiera arrivi alla divinità, l'altare deve essere costruito ed orientato perfettamente.

10. Taglia e cuci

L'origine rituale della matematica spiega l'origine del problema della duplicazione del cubo e della quadratura del cerchio. Inoltre, affina il metodo della dissezione e ricombinazione, fondamentale per la geometria euclidea elementare.

11. Yantra

Amuleti magici. Forme geometriche perfette in relazione determinata.

12. Sri Yantra

Lo Śrīcakra (anche Śrīyantra) secondo lo Nityāṣoḍaṣikārṇava. Questo yantra è proprio del culto della dea Tripurasundarī ("Bella dei tre mondi"), di cui esso rappresenta la forma cosmica, che la scuola tantra detta dello Śrīvidyā considera divinità suprema. È costituito dall'incrocio di due insieme di triangoli, quattro con i vertici indirizzati verso l'alto, a rappresentare il principio maschile, quindi Śiva, e cinque con i vertici rivolti verso il basso, che rappresentano Śakti, quindi il principio femminile. Lo Śrīcakra è modellato per offrire una visione della unitarietà dell'esistenza di cui fa parte lo stesso meditante.

13. Attività con GeoGebra sullo Yantra

https://www.geogebra.org/classroom/d9xskmp7

14. Il percorso argomentare e dimostrare

https://www.geogebra.org/classroom/z2qnputy

15. Matematica in Mesopotamia

Per *Matematica in Mesopotamia* intendiamo la matematica delle civiltà che si sono avvicendate nel corso dei secoli, tra il 3500 A.C. e il 300 D.C. nell'area intorno ai fiumi Tigri ed Eufrate, corrispondenti per la maggior parte all'odierno Iraq (Sumeri, Accadi, Babilonesi, Persiani). Testimonianze scritte di queste civiltà ci sono pervenute attraverso numerose tavolette di argilla incise con uno stilo (scrittura cuneiforme) e poi cotte nei forni. Molte di queste tavolette contengono registrazioni numeriche relative a merci o persone e calcoli. Le tavolette di contenuto matematico più interessanti si collocano in due periodi temporali distinti. Il primo, il più significativo per la storia della matematica, comincia intorno al 2000 A.Ce prende il nome di "babilonese antico", abbreviato OB (old babylonian). Il secondo, tra il 600 A.C. e il 300 D.C.

16. Il sistema di numerazione Babilonese

Il sistema di numerazione babilonese (i babilonesi conquistarono la Mesopotamia intorno al 2000 A.C.) è un sistema posizionale in base 60, che richiede due soli simboli per rappresentare tutti i numeri interi, grazie ad una modalità di rappresentazione dei numeri da 1 a 59 che usa la ripetizione di un simbolo per indicare le unità e la ripetizione dell'altro per indicare le decine (rivelando quindi anche tracce di un sistema "decimale", probabilmente utilizzato da alcune popolazioni indigene).

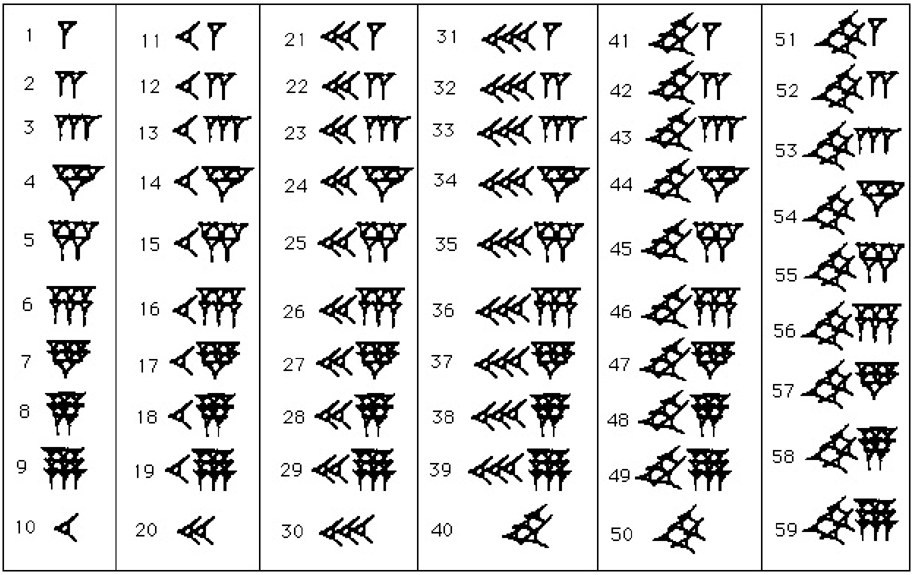


Figura 1 – Le cifre del sistema di numerazione babilonese sono solo due, quelle usate per 1 e 10. Componendo queste come mostrato nella figura si rappresentano tutti i numeri da 1 a 59. I numeri più grandi si rappresentano seguendo le regole della notazione posizionale. La mancanza di un simbolo per denotare lo zero, lascia una certa ambiguità nella rappresentazione dei numeri.

Per rappresentare i numeri in notazione sessagesimale, utilizzeremo la notazione

$$n_1, n_2, \ldots, n_k; m_1, \ldots, m_h \qquad 0 \le n_i, m_j \le 59$$

per indicare il numero

$$n_1 \cdot 60^{k-1} + n_2 \cdot 60^{k-2} + \cdots + n_k \cdot 60^0 + m_1 \cdot 60^{-1} + \cdots + m_h \cdot 60^{-h}.$$

Questa notazione, con l'uso del punto e virgola e la virgola per separare i multipli delle potenze successive risolve le ambiguità della notazione originale ma è un artefatto moderno. La distinzione tra parte intera e decimale di un numero non è documentata nelle tavolette.

17. Tavoletta Yale Babylonian Collection 7289

Uno dei documenti più interessanti della matematica babilonese è la tavoletta conservata nella collezione babilonese dell'università di Yale e indicata con il numero 7289. Si ritiene che la tavoletta si possa datare tra il 1880 a.c. e il 1600 a.c..

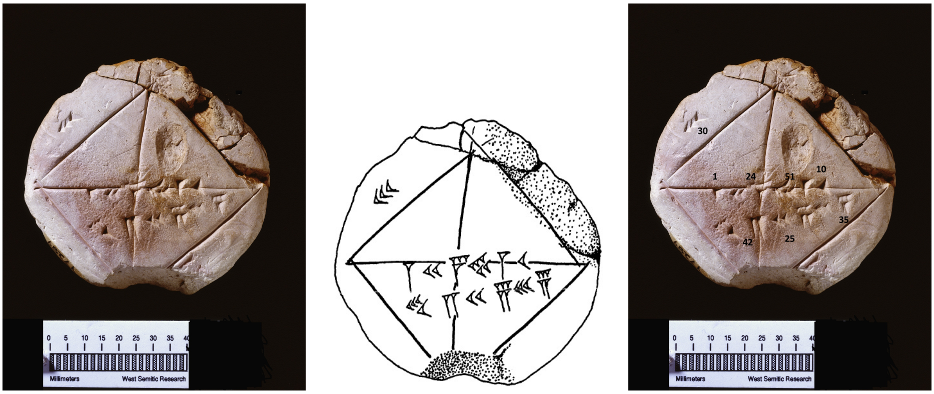


Figura 2 – A sinistra, una fotografia della tavoletta. In centro, una figura in cui appiano più chiaramente le cifre. A destra, la fotografia su cui sono state sovrapposte le rappresentazioni decimali dei numeri presenti.

Nella tavoletta sono riportati tre numeri che, in relazione alla figura che li accompagna, sono stati interpretati nella maniera seguente. La lunghezza del lato del quadrato (30), un'approssimazione alla terza cifra sessagesimale della radice di due (1;24,51,10) (esatta fino alla quinta cifra decimale) e la lunghezza (approssimata) della diagonale del quadrato (42;25,35=30 * 1;24,51,10). La tavoletta testimonia la conoscenza del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli e la capacità di calcolo approssimato delle radici quadrate.

18. Algoritmo dicotomico per il calcolo della radice

Non sappiamo quale procedura utilizzassero i Babilonesi per calcolare la radice quadrata di due. Particolarmente semplice e quindi plausibile, ci sembra quella che oggi indichiamo come procedura dicotomica per il calcolo approssimato della soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$.

: Passo 0 poniamo: $a = 1$, $b = 2$;
: Passo 1 calcoliamo $c = (a + b)/2$;
: Passo 2 se $c^2 - 2 < 0$, sostituiamo a con c altrimenti sostituiamo b con c;
: Passo 3 torniamo al Passo 1.

19. Tavoletta IM67118 del Museo Nazionale di Baghdad

Nella tavoletta IM 67118, conservata presso il Museo Nazionale di Baghdad, viene posto e risolto il seguente problema.

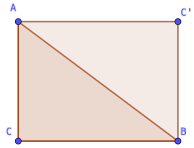
> *Determinare i lati di un rettangolo la cui area misura 45,0 e la cui diagonale misura 1,15.* [1]

Riportiamo una traduzione italiana della traduzione disponibile su Wikipedia. Le righe del testo corrispondono a quelle della tavoletta. Molte frasi si completano alla riga successiva, come dovrebbe risultare chiare dall'uso della punteggiatura. Usiamo la notazione di Neugebauer per rappresentare i numeri in notazione sessagesimale, utilizzando anche lo zero (che non compare nella tavoletta) per maggior chiarezza. In parentesi tonda abbiamo aggiunto del testo per rendere più comprensibile l'esposizione molto sintetica dell'originale. In parentesi quadra abbiamo aggiunto dei chiarimenti.

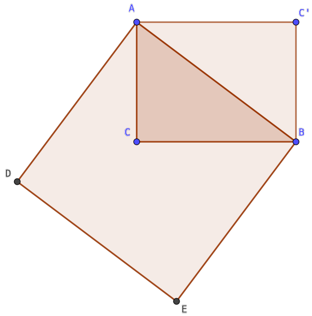
FRONTE

(1) Se, a proposito di una diagonale (di un rettangolo) vi si domanda
(2) così, 1,15 la diagonale, 45,0 la superficie; [il valore numerico dell'estensione di una figura la identifica nel seguito. Questo permette di riferirsi a una figura senza usare le lettere, come siamo abituati a fare.]
(3) lunghezza e larghezza corrispondono a cosa? Tu, per il tuo procedere

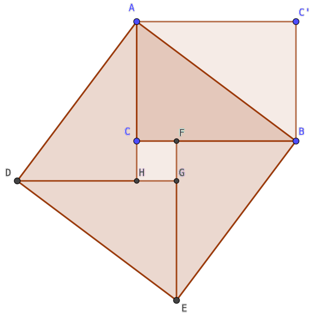
[1] I numeri sono scritti usando la convenzione di Neugebauer, che abbiamo discusso in precedenza.



(4) estendi la diagonale 1,15 per la sua controparte [considera il quadrato sulla diagonale; la "contro-parte indica la direzione ortogonale, e non viene esplicitamente menzionata quando si trattadi direzioni parallele all'orizzontale o alla verticale]:
(5) valuta la sua estensione, viene 1,33,45



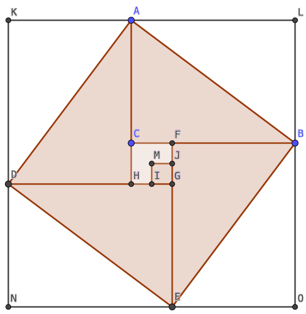
(6) puoi tenere in mano 1,33,45 [ricorda la figura e la sua estensione].
(7) la misura dell'estensione della tua superficie è 45,0. Raddoppiala e ottieni 1,30,0. [Si tratta dell'estensione dei quattro triangoli che appaiono in figura]



(8) Da(lla superficie che misura) 1,33,45 togli (la figura precedente che misura 1,30,0): La misura di ciò che rimane è 3,45. [Misura del quadrato CFHG]

(9) Prendi iI lato della figura 3,45 (che ha i lati uguali): La misura del lato è 15. La sua metà,

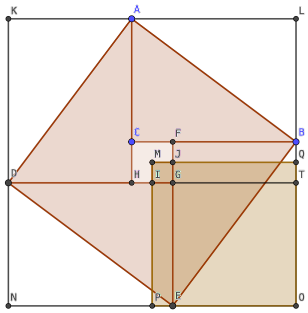
(10) misura 7;30. Innalza un quadrato sopra il lato di misura 7:30: (la misura del quadrato) risulta 56;15 [Si tratta della misura dell'estensione del quadrato più piccolo.]



(11) (Metti) 56;15 nella tua mano. (Aggiungi) la superficie (che misura) 45,0 sopra la tua mano [a quella che avevi già in mano],

(12) (viene una superficie che misura) 45,56;15. Il lato della superficie (che ha i lati uguali) e che misura 45,56;15:

(13) misura 52;30 [si tratta del lato MQ del quadrato scuro in basso a destra della figura]



(14) (il lato che misura) 7;30 che hai prodotto, ad uno (dei lati uguali che misurano 52;30)
(15) appendilo [7;30+52;30=1,0]. Da uno (dei lati uguali che misurano 52;30)
(16) toglilo [52;30-7;30=45]. 1,0 (è quindi) la tua lunghezza, 45 la tua ampiezza. [Con riferimento alla figura, attraverso delle operazioni di taglia e cuci sulle figure e di somme, prodotti, quadrati e estrazioni di radice, siamo riusciti a calcolare le lunghezze MQ e MJ e da queste calcoliamo la larghezza MQ-MJ e l'altezza MQ+MJ].

(17) . . .

[La tavoletta prosegue, anche sul retro, con la verifica che i valori ottenuti risolvono il problema e riporta anche una figura poco esplicativa. L'ipotesi che la risoluzione fosse illustrata/motivata da operazioni geometriche presuppone l'uso di uno strumento diverso dalla tavoletta su cui fare i disegni.].

Il metodo risolutivo esposto nella tavoletta può essere illustrato con la notazione algebrica. Nella tavoletta non appaiono le espressioni letterali che abbiamo riportato nel seguito a sinistra delle uguaglianze ma solo numeri e indicazioni per operare calcoli numerici. Da ciò non segue necessariamente che i matematici babilonesi operassero a livello puramente algebrico, come è stato inizialmente supposto da molti. Lo storico della matematica danese Jens Høyrup, attraverso una meticolosa analisi dei termini utilizzati nelle tavolette ha proposto invece che l'intero procedimento fosse guidato da un'intuizione essenzialmente geometrica. L'assenza delle figure nelle tavolette, che ha sottovalutato l'interpretazione geometrica a favore di una interpretazione algebrica del modo di ragionare dei babilonesi, si spiega facilmente con la supposta esistenza di supporti diversi sui quali eseguire i calcoli. È stata proposta l'esistenza di tavolette di sabbia su cui eseguire facilmente i disegni necessari e altrettanto facilmente cancellarli. Nessuna evidenza archeologica di tali strumenti ci è però pervenuta.

Riteniamo comunque utile, anche in vista dell'elaborazione di percorsi didattici che affrontino da più punti di vista alcuni dei problemi considerati dai matematici babilonesi, collegandoli all'insegnamento dell'algebra, offrire anche un'interpretazione puramente algebrica che utilizza espressioni letterali che per noi risultano essere molto efficaci per sintetizzare i calcoli svolti e mettono in luce la potenza del calcolo algebrico che elimina la necessitò dell'interpretazione geometrica e del controllo geometrico su ciò che si sta facendo.

- $xy = 45, 0$. Calcola $2xy = 1, 30, 00$.
- Sottrai l'espressione precedente da $x^2 + y^2 = (Pitagora) = 1, 33, 45$ in modo da avere $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 3, 45$.
- Estrai la radice quadrata in modo da avere $x - y = 15$.
- Dividi per 2 per avere $\frac{x-y}{2} = 7; 30$.
- Dividi $x^2 + y^2 - 2xy = 3, 45$ per 4 per ottenere
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} = 56; 15.$$
- Aggiungi $xy = 45, 0$ per avere
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} = 45, 56; 15.$$
- Estrai la radice quadrata in modo da avere
$$\frac{x+y}{2} = 52; 30.$$
- Aggiungi $\frac{x+y}{2} = 52; 30$ a $\frac{x-y}{2} = 7; 30$ per ottenere $x = 1, 0$.
- Sottrai $\frac{x-y}{2} = 7; 30$ a $\frac{x+y}{2} = 52; 30$ per ottenere $y = 45$.
- Quindi, il rettangolo ha lati $x = 1, 0$ e $y = 45$.

Sia l'interpretazione geometrica sia quella algebrica presuppongono una sensibilità all'argomentare maggiore di quella presupposta da una semplice esecuzione di calcoli guidati dalla ripetizione di casi analoghi o da semplici ricette numeriche quali la procedura dicotomica per l'approssimazione di una radice quadrata. Qualcosa in base a cui "spiegare il procedimento". Ci sembra d'altra parte difficile sostenere un approccio puramente aritmetico alla soluzione di problemi di questo genere, come invece è possibile nell'affrontare problemi quale quello di determinare lunghezza e larghezza di un rettangolo di cui sono assegnate la somma e il prodotto (cfr. la seconda attività del percorso "argomentare e dimostrare").

20. Tabella dei quadrati

Un aspetto caratteristico relativo alle modalità di calcolo dei Babilonesi riguarda l'uso di tabelle numeriche che sostituiscono e vanno oltre la tavola pitagorica. Una tavoletta risalente al 2000 A.C. rinvenuta a Senkerah riporta i quadrati dei numeri da 1 a 59.

Le regole

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

e

$$ab = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2}$$

(che hanno una evidente interpretazione geometrica) permette di calcolare un prodotto usando la tavola dei quadrati, la sottrazione e la divisione per quattro o per 2. La tavoletta di Senkerah sostituisce quindi, per l'aritmetica in base 60, l'uso della tavola pitagorica per la moltiplicazione.

1	1	13	2,49
2	4	14	3,16
3	9	15	3,45
4	16	16	4,16
5	25	17	4,49
6	36	18	5,24
7	49	19	6,1
8	1,4	20	6,40
9	1,21	21	7,21
10	1,40	22	8,4
11	2,1	23	8,48
12	2,24	24	9,6

Tabella dei quadrati dei primi 24 numeri naturali.

21. Tabella degli inversi

Per quanto riguarda la divisione, i babilonesi usavano tavole per i reciproci dei numeri del tipo $2^m 3^n 5^p$ e la regola $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

2	0; 30
3	0; 20
4	0; 15
5	0; 12
6	0; 10
8	0; 7, 30
9	0; 6, 40
10	0; 6
12	0; 5
15	0; 4
16	0; 3, 45
18	0; 3, 20
20	0; 3
24	0; 2, 30
25	0; 2, 24
27	0; 2, 13, 20

Tabella degli inversi dei primi sedici numeri naturali della forma $2^m 3^n 5^p$.

Se l'inverso del numero b non appare nelle tabelle, ne sceglievano un'approssimazione. Per esempio

$$\frac{1}{13} = \frac{7}{91} \sim 7 \times \frac{1}{90} = 7 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{9}.$$

22. Tavoletta BM92698

I matematici babilonesi svilupparono procedure per ricondursi all'uso di tabelle di interi. Per esempio, per risolvere l'equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 = c$$

essi, usando ancora una volta un linguaggio formale che non conoscevano e che sostituivano probabilmente con descrizioni verbali che insegnassero a convertire in algoritmi le informazioni contenute in tabelle numeriche opportunamente strutturate, moltiplicavano per a^2 e dividevano per b^3 ottenendo (utilizzando le notazioni moderne)

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}.$$

Ponendo $y = ax/b$ l'equazione originale si trasforma in $y^3 + x^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, che si può risolvere, in generale in modo approssimato, utilizzando le tabelle per i quadrati e per i cubi. Da una soluzione si può risalire ad una soluzione, in generale approssimata, dell'equazione originale $x = by/a$.

23. Problemi di secondo grado

Molti semplici problemi geometrici portano alla considerazione di equazioni di secondo grado. Per esempio, un problema tratto in un'antica tavoletta chiede di determinare lunghezza e larghezza di un rettangolo in cui la lunghezza eccede la larghezza di 7 e l'area è pari a 1,0. Usando il linguaggio dell'algebra moderna, si tratta di calcolare la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $x^2 + 7x = 1,0$ per ottenere la larghezza richiesta. La procedura descritta dallo scriba per giungere alla soluzione è la seguente: calcola la metà di 7, cioè 3;30, quadra il risultato per ottenere 12;15. Aggiungi 1,0 per ottenere 1,12;15. Estrai la radice quadrata (utilizzando una tavola dei quadrati) per ottenere 8;30. Da ciò sottrai 3;30 per ottenere la risposta 5 per la larghezza cercata. Si tratta degli stessi calcoli che si devono fare utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. In questo senso, la procedura è equivalente alla formula risolutiva.

$$x = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}\right) - \frac{b}{2}$$

per l'equazione $x^2 + bx = c$.

> *We should be careful not to read into early mathematics ideas which we can see clearly today yet which were never in the mind of the author. Conversely we must be careful not to underestimate the significance of the mathematics just because it has been produced by mathematicians who thought very differently from today's mathematicians.* (cfr. MacTutor: Babylonian Pythagoras, [**?**])

Si osservi che manca nella matematica babilonese la notazione algebrica e il calcolo algebrico che permette di dimostrare la formula. Secondo molti storici, manca anche, almeno per quanto ne sappiamo, l'esigenza di fornire una dimostrazione della correttezza della procedura risolutiva, anche se le osservazioni di Høyrup sull'interpretazione geometrica dei calcoli numerici eseguiti sulle tavolette mette in discussione, a nostro avviso, queste assunto aprendo la possibilità di una giustificazione per evidenza geometrica di alcune operazioni, diversa dalla sola giustificazione per tentativi ed errori.

24. Kline, sulla Matematica Babilonese

L'uso da parte dei Babilonesi di termini speciali e di simboli per le incognite, il loro impiego di alcuni simboli per le operazioni, e la loro soluzione di alcuni tipi di equazioni in una o più incognite, specialmente equazioni quadratiche, si può considerare un primo passo nella direzione dell'algebra. Il modo sistematico che svilupparono per scrivere i numeri interi e le frazioni, gli permise di portare l'aritmetica ad un livello piuttosto avanzato e di farne uso efficace in molte situazioni pratiche, specialmente in astronomia. Erano in possesso di abilità numeriche e di certe abilità che potremmo definire algebriche, ma nel complesso la loro aritmetica e la loro algebra erano molto elementari. Anche se lavoravano con numeri e problemi concreti, evidenziavano una comprensione parziale della matematica astratta nel riconoscere che alcune procedure erano tipiche di certe classi di equazioni. Si pone la questione di comprendere fino a che punto i Babilonesi facevano uso della dimostrazione matematica. Essi risolsero con procedure sistematiche corrette equazioni piuttosto complicate con più incognite. Però, fornivano istruzioni verbali solo sui passi da compiere, senza offrire alcuna giustificazione. Quasi certamente i processi aritmetici e algebrici e le regole geometriche erano il risultato finale di evidenze fisiche, tentativi ed errori, intuizioni. Che i metodi funzionassero era, per i babilonesi, giustificazione per il loro uso: il concetto di dimostrazione, la nozione di una struttura

> *logica basata su principi che garantiscano l'accettazione di un principio piuttosto che un altro, e la considerazione di questioni del tipo "sotto quali condizioni possono esistere soluzioni a certi problemi", non trovano spazio nella matematica dei Babilonesi.*

Dovremmo dire più correttamente che le giustificazioni dei metodi non sono documentate. Quindi, le affermazioni di Kline sono certamente plausibili ma non certe ed esiste spazio per una ricostruzione e un giudizio meno critico sui contenuti della matematica mesopotamica e babilonese.

25. Friberg, sulla Matematica Babilonese

A questo proposito mi sembra opportuno citare un lungo brano di uno dei principali studiosi contemporanei della matematica mesopotamica.

> ≪*Fin dagli inizi nel periodo degli esordi della scrittura alla fine del IV millennio, e per tutta la sua storia, la matematica mesopotamica sembra orientata verso le applicazioni; essa aveva lo scopo di insegnare a futuri scribi e amministratori come trattare in modo efficace e corretto calcoli complicati con numeri e misure espresse in tutti i diversi sistemi cuneiformi di notazione. A quanto pare, la geometria non era studiata per sé stessa, ma soltanto perché era una fonte di problemi interessanti che sollecitavano l'intuizione visiva. Non c'è traccia di impostazione assiomatica nella geometria babilonese; non sono mai dati né definizioni né assiomi e né enunciati o dimostrati teoremi. Vi sono tuttavia molte indicazioni che mostrano come la matematica, e in particolare la geometria, fossero insegnate in modo metodico nelle scuole paleobabilonesi (...) la matematica babilonese scelse di operare sulla base di testi tematici*[2] *contenenti problemi di complessità gradualmente crescente: in un certo senso ciò costituisce un metodo deduttivo, benché diverso dall'impostazione assiomatica, basata su*

[2][1] ≪In un 'testo tematico' sono dati esempi di complessità crescente di un'idea matematica, il tema, appunto.≫

definizioni, assiomi, teoremi e dimostrazioni, tipica della geometria greca. Inoltre nella matematica babilonese si ha spesso una verifica delle risposte ottenute≫

≪*I primi geometri greci, che avevano probabilmente familiarità con gran parte della tradizione matematica mesopotamica, trasformarono completamente questa eredità intellettuale. Forse a causa della scoperta delle grandezze incommensurabili essi rifiutarono i metodi dei loro predecessori, anche se non i risultati che questi avevano ottenuto. Le dimostrazioni rigorose basate su definizioni astratte e su assiomi assunsero il ruolo che nella matematica babilonese aveva il metodo, concettualmente più semplice, di ripercorrere all'inverso un algoritmo con valori numerici dati per controllare i valori ottenuti. In questa prospettiva, varie parti degli Elementi di Euclide si possono considerare tentativi di dimostrare come una parte consistente dell'algebra delle misure, della geometria e della teoria dei numeri babilonesi potesse rientrare nel quadro non numerico della matematica greca. Un esempio che dimostra come si sia ottenuta questa trasformazione è la riformulazione di alcuni punti fondamentali dell'algebra 'metrica' babilonese contenuta nel Libro II degli Elementi. (...) Per esempio, la figura che illustra la prop. 14 [del Libro II] si può spiegare come una soluzione costruttiva del problema di trovare due lati quando sono noti il loro prodotto (come dire l'area del rettangolo costruito con essi) e la loro somma (Euclide considera in realtà un problema leggermente diverso, ma la figura e l'idea sono le stesse).*≫

La matematica ellenica e i suoi rapporti con la retorica e la filosofia

26. La civiltà della polis

Tra il VII e il VI secolo avanti Cristo, si afferma in Grecia *la civiltà delle polis* che presenta elementi di dinamicità nuovi rispetto alle civiltà dei grandi imperi dell'Egitto e della Persia, caratterizzati da un forte potere centrale e da una dinamica sociale molto ridotta. In Grecia ogni città è indipendente dalle altre e, all'interno di ogni città, il potere viene condiviso da una cerchia, seppur ristretta, di persone che deve discutere per prendere le decisioni. Si tratta di una minoranza, sufficiente però a stimolare la pratica del confronto democratico, dove il prevalere di un'opinione non è più solo determinato dai rapporti di forza ma anche dalla capacità di persuasione. Questa pratica di mettere in discussione le opinioni altrui per affermare le proprie è il terreno fertile entro cui si sviluppano la filosofia, la scienza e la matematica argomentativa.

27. La nascita della scienza

In Egitto e in Mesopotamia un lento e continuo progresso tecnologico, basato sull'accumulo e all'ordinamento di conoscenze empiriche, aveva permesso di raggiungere importanti traguardi in molti campi, ma non esistevano le scienze come le intendiamo oggi: corpi organici di conoscenze organizzate in base a principi teorici e metodologici il cui sviluppo si basa anche sul confronto con il pensiero degli altri scienziati.

28. Dal mito alla scienza: l'affermarsi del pensiero razionale

La prime domande che si pongono la scienza e la filosofia greca sono del tipo: Come si è potuto formare il nostro universo a partire dal caos?

I primi tentativi di risposta dei filosofi milesi traspongono su un piano astratto le spiegazioni del mondo che proponevano le mitologie antiche. La struttura delle loro descrizioni dell'universo corrisponde ancora a quella dei miti: dopo uno stato indistinto e di confusione dove tutte le cose sono mescolate, emergono le differenziazioni in coppie di qualità opposte: caldo e freddo, secco e umido, che poi interagiscono, risultando ciascuno provvisoriamente e alternativamente vincitore e vinto.

29. Talete

Talete il fondatore della scuola ionica, e considerato il fondatore della matematica greca, crea una teoria cosmologica che spiega il divenire dell'Universo a partire da una sola sostanza primordiale, l'acqua, suscettibile di trasformarsi in tutte le altre. Per condensazione, l'acqua forma i corpi solidi; per evaporazione l'aria e ciò che genera il fuoco. Ma l'acqua non è solo elemento costitutivo, è anche supporto: la nostra terra si appoggia sulla sua massa infinita che l'inviluppa da tutte le parti.

30. Anassimandro

Per Anassimandro (610 – 547), allievo di Talete, il principio delle cose non è più un elemento materiale, ma è *l'apeiron*, l'indeterminato, l'illimitato, pensato come contenitore di tutti i corpi; tutti i corpi si trovano fusi insieme ed è dall'organizzazione di questo caos infinito che nascono i mondi.

> *Alcuni affermano che la terra sta dove è a causa di un principio di indifferenza. Tale è, tra gli antichi, Anassimandro. Perché ciò che è situato nel centro e ad uguale distanza dalle estremità non ha inclinazione qualsivoglia a muoversi verso l'alto piuttosto che verso il basso o verso un lato piuttosto che verso un altro; e siccome è impossibile muoversi in direzioni opposte nello stesso tempo, è necessario che stia dov'è.* (Aristotele)

31. Considerazioni su Anassimandro

Tutte le civiltà umane hanno sempre pensato che il mondo fosse fatto di cielo sopra e Terra sotto. Sotto la Terra, perché non caschi, ci deve essere altra terra; oppure una grande tartaruga appoggiata su un elefante come in alcuni miti asiatici, o gigantesche colonne come quelle di cui parla la Bibbia. Questa immagine del mondo è condivisa dalle civiltà egizia, cinese, maya, dell'antica India e dell'Africa nera, dagli Ebrei della Bibbia, dagli Indiani del Nord America, dagli antichi imperi di Babilonia e da tutte le altre culture di cui abbiamo traccia. Tutte eccetto una: la civiltà greca. (Rovelli)

Nel pensiero di Anassimandro, nella sua ribellione contro certezze che appaiono ovvie e nell'affidarsi alla ragione per costruire nuove spiegazioni, scorgiamo i primi barlumi caratteristici della filosofia razionale e del pensiero scientifico. Non tutti, naturalmente. Manca l'idea di descrivere i fenomeni con leggi matematiche (che comparirà nella scuola pitagorica) e quella di esperimento, per collegare, in entrambi i versi, teoria e realtà.

32. Demos

In queste prime concezioni filosofiche, molti studiosi vedono il riflesso delle condizioni sociali della città, che subiscono una profonda mutazione nel corso del sesto secolo. È intorno al 600 a. C., dopo una aspra lotta tra gli aristocratici e gli artigiani che i "cittadini" (Demos) accedono alla libertà e al potere.

L'avvento del pensiero astratto corrisponde, sul piano politico, alla messa in atto del principio di libertà e sovranità del popolo, e, sul piano sociale, a un periodo di profondi rivolgimenti. Una cerchia di intellettuali medici, retori e philosophoi (amanti di saggezza, nei quali si possono vedere i veri specialisti del sapere) si afferma. Il sapere acquisito non è tuttavia la proprietà esclusiva di questa sola cerchia ma, attraverso il dibattito pubblico, diviene il bene comune di tutti i cittadini.

33. Agone

Uno dei tratti caratteristici della società greca, anche arcaica, è l'agone, la rivalità, il combattimento, di cui i giochi olimpici costituiscono una forma pacifica. L'uomo greco ama suscitare situazioni conflittuali e opporsi a forze concorrenti; cerca un avversario che gli permetta di affermare e consolidare le sue opinioni. Al fine di prevalere sull'altro, è capace di difendere posizioni estreme. Si riconosce questo stesso spirito nella predilezione dei greci per i giochi oratori e nella loro abilità di perfezionare le tecniche retoriche.

La civiltà greca classica è una «civiltà della parola», nella quale i sistemi di spiegazione del mondo, non possono più esprimersi nel linguaggio dei miti, ma devono presentarsi nella forma di problemi da sottoporre alla discussione e suscettibili di risposte affermative o negative.

34. Matematica argomentativa

Oggetto di discussione diventano anche le definizioni e le proposizioni matematiche. Le proposizioni non sono più semplici enunciati che traducono dei fatti empirici euristicamente o sperimentalmente evidenti ma necessitano d'ora in poi di una deduzione che conduca, da una o da più proposizioni (premesse) a una conclusione necessaria.

35. Algoritmi e strutture. Costruzioni e proprietà.

Nella matematica antica, algoritmi di calcolo numerico e costruzioni geometriche erano al centro degli interessi di chi si occupava di matematica. I numeri e le figure stavano, in un certo senso, dentro le cose.

Algoritmi e costruzioni operano su oggetti che rappresentano numeri e figure (palline di un abaco, disegni realizzati con strumenti opportuni).

Non era necessaria un'evidenza argomentativo –deduttiva ma era sufficiente una evidenza di carattere algoritmico o figurale.

Se la cosa ci sembra innaturale, chiediamoci: quando mai ci capita di dimostrare l'esattezza di un programma al calcolatore? Quando mai sentiamo l'urgenza di dimostrare l'esattezza di una costruzione fatta con un software di geometria dinamica.

36. Deduzioni

A un certo momento, in un contesto geografico e culturale ben preciso, quello della civiltà delle polis, comincia ad affermarsi l'interesse per una matematica in cui gli oggetti e le relazioni tra essi cominciano a spostandosi su un piano più astratto. Si formalizzano le definizioni e le proposizioni e si cerca di collegarle tramite catene di deduzioni. In questa fase, le reti di deduzioni che collegano le proposizioni sono dinamiche e la struttura globale delle reti non è organizzata né ottimizzata.

37. Dimostrazioni

L'ultima fase prevede un'organizzazione stabile e quanto più possibile ottimizzata della rete delle deduzioni. Ogni proposizione è una foglia di un albero che affonda le sue radici in un piccolo insieme di assiomi. Si lavora per eliminare i cicli, per ridurre i postulati e per sceglierli della forma più semplice evidente e verificabile.

38. Il percorso didattico

Il percorso didattico è stato progettato per guidare l'esperienza degli studenti attraverso queste tre fasi della matematica (matematica dell'artista e dell'artigiano; matematica del filosofo e del fisico; matematica del logico e del matematico).

Dopo le attività sulla matematica vedica e su quella babilonese, volte a far riflettere su un modo di fare matematica che privilegia l'intuizione geometrica e algoritmica, sono previste alcune attività mirate a cogliere lo spirito della matematica ellenica e a riflettere sulle ragione dello sviluppo della matematica argomentativa e sui collegamenta con la retorica e la filosofia.

39. Le forme del confronto democratico.

Nella terza attività ci si confronta con la pratica del dibattito argomentativo come metodo di confronto democratico nella società greca.

Dopo una prima fase di approfondimento, gli allievi si cimentano in attività di dibattito argomentativo su tematiche relative ai rapporti tra scienza e società.

La dialettica di Platone, come metodo della ricerca filosofica, e la retorica di Aristotele, come scienza della persuasione, vengono illustrate con riferimento a un'attività di dibattito argomentativo.

40. Carattere argomentativo della matematica greca.

Nel quarto incontro si affronta il problema della definizione.

A partire dall'esigenza di precisare le definizioni dei termini impiegati nell'uso quotidiano della lingua per comunicare, si confrontano le definizioni sul vocabolario con quelle della matematica e della filosofia mettendo in evidenza lo scopo e la natura diversa della definizione in modo da facilitare la comprensione del ruolo specifico della definizione matematica e aiutare lo studente a superare le difficoltà di apprendimento connesse.

L'attività ruota intorno al problema della definizione di figura con riferimento al Menone e a una attività sulle figure del Tangram ispirata a Lakatos.

Nel nostro percorso il Menone viene utilizzato come spunto per riflettere su varie tipologie di definizione: del vocabolario, in filosofia, in matematica e confrontarle con quelle proposte dai ragazzi nella parte dell'attività relativa al conteggio delle figure del Tangram.

Inoltre, viene usato per fornire un esempio di dialogo scientifico cui ispirarsi per scrivere i dialoghi richiesti agli studenti e ai docenti durante il percorso.

Infine ci è servito in quanto presenta una semplice dimostrazione del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli, a partire dalla quale abbiamo costruito un video con una dimostrazione proposta ai ragazzi.

41. Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora.

Nel quinto incontro focalizziamo l'attenzione su tre domande:

- Cos'è una dimostrazione?
- Come si dimostra?
- Perché si dimostra?

Non diamo le risposte ma suggeriamo attività per chiarire il significato delle domande e acquisire strumenti per poter rispondere.

Cominciamo presentando cinque filmati con cinque "dimostrazioni" del teorema di Pitagora.

Ogni filmato è stato scelto per mettere in evidenza diverse caratteristiche delle argomentazioni proposte per aiutare la classe a capire cosa manca in ognuna di esse dal punto di vista logico e argomentativo. Sinteticamente. le ragioni per la scelta di ognuno di questi filmati sono le seguenti:

- *Verifica idraulica (Pitagora 1).* Non si tratta di un argomentazione matematica ma semplicemente di una verifica sperimentale di un caso particolare. La verifica, inoltre, si basa su numerose assunzioni implicite che vengono accettate senza soffermarsi. Per esempio, che lo spessore dei recipienti sia uguale.
- *Verifica geometrica. (Pitagora 3)* Anche in questo caso l' argomento si riferisce a un caso particolare cioè al triangolo rettangolo di lati di lunghezza proporzionale ai numeri 3, 4 e 5. L'argomento geometrico proposto, cioè la suddivisione dei quadrati in quadrati più piccoli non ha validità generale.
- *Argomento di Perigal (Pitagora 2)* La giustificazione è euristica e non deduttiva. La richiesta di scrivere un dialogo maieutico

intorno a questa giustificazione, serve per aiutare la classe a cambiare il punto di vista sugli oggetti matematici e sulla necessità di argomentare le proprie deduzioni in un contesto di "agorà matematica"
- *Argomento di Leisnez (Pitagora 4).* La giustificazione è euristica e non deduttiva. Anche per questa argomentazione è stato chiesto alla classe di scrivere un dialogo maieutico.

42. Argomento fallace (non presente nelle classi GeoGebra)

Questo argomento modifica una dimostrazione da noi elaborata a conclusione del lavoro fatto sul Menone. Questa dimostrazione si presta a introdurre un argomento fallace che non è immediato individuare. Inoltre ha un carattere più formale delle precedenti e quindi è stata scelta perché è più vicina all'idea di dimostrazione "incomprensibile" che hanno gli studenti. Infatti, come ci aspettavamo, non pochi l'hanno indicata come quella più rigorosa e sono rimasti sorpresi dal fatto che fosse la più sbagliata.

L'aggiustamento della dimostrazione errata che abbiamo proposto dimostrazione non è una dimostrazione consigliabile del teorema di Pitagora perché è troppo complicata, ma ci ha offerto un utile spunto per diverse discussioni.

Innanzitutto, è un esempio di come fidarsi di quello che si vede può essere ingannevole.

Poi suggerisce di non affidarsi al formalismo nelle dimostrazioni ma di controllarlo sempre con l'intuizione e con la ricerca di dimostrazioni più semplici e più facilmente verificabili.

Inoltre, mette in evidenza come sia importante imparare ad analizzare gli errori, che spesso possono suggerire modifiche per ottenere la soluzione di un problema o la dimostrazione di un teorema. Ciò stimola pazienza, fiducia e perseveranza, caratteristiche indispensabili per fare matematica.

L'analisi dei filmati ha riguardato anche una discussione sui pregi e sui limiti comunicativi. Questi aspetti sono a nostro avviso di grande importanza nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica e devono essere trattati prestando particolare attenzione a mettere in luce le insidie di una comunicazione superficiale che non stimola la riflessione. È risultato particolarmente utile discutere gli aspetti comunicativi dei filmati proposti con la copresenza degli insegnanti di matematica, filosofia, lettere, storia e inglese.

43. Un filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora.

Nella sesta attività abbiamo la classe in gruppi di tre/quattro studenti e abbiamo chiesto ad ogni gruppo di preparare un filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora. A metà dei gruppi è stato chiesto di elaborare tutti i dettagli dell'argomento di Leisnez, all'altra metà di quello di Perigal. Abbiamo chiesto di illustrare le costruzioni con il software di geometria dinamica utilizzato nelle precedenti attività e di presentare le argomentazioni nella forma di dialogo, che abbiamo fatto praticare agli studenti nella prima, seconda e quarta attività

Al termine dell'attività ogni gruppo ha prodotto un filmato di circa 5 minuti e la trascrizione della sceneggiatura.

Ogni gruppo ha ricevuto un *report* scritto dettagliato report sul lavoro svolto, preparato dagli insegnanti che hanno visionato e discusso ogni filmato con attenzione.

Gli insegnanti hanno quindi diviso la classe in due gruppi a ognuno dei quali è stato richiesto di preparare un nuovo filmato con la dimostrazione di Leisnez e uno della dimostrazione di Perigal che tenesse conto delle valutazioni contenute nei *report*, in preparazione alla successiva attività.

La richiesta di costruire un filmato è stata posta agli studenti con la convinzione che il lavoro di progettazione ed realizzazione di un oggetto digitale potesse risultare particolarmente utile per affinare le competenze argomentative. comunicative e di lavoro collaborativo e a sperimentare la costruzione della rete di relazioni tra le proposizioni matematiche che abbiamo descritto in precedenza.

Abbiamo osservato come questa richiesta abbia effettivamente stimolato gli studenti a interrogarsi su come e cosa dimostrare e a confrontare le proprie opinioni a riguardo.

44. Una testimonianza di un partecipante al laboratorio

Nel tema proposto dalla professoressa di italiano al termine del percorso, in cui veniva richiesto un consuntivo dell'esperienza fatta, una studentessa ha scritto:

Non scorderò mai le quattro giornate della settimana dello studente che ho passato in aula studio cercando di capire come sviluppare da zero una dimostrazione abbastanza complessa. Come non scorderò le ore spese nella mia camera a registrare il primo video. (...) Queste attività mi hanno insegnato ad apprezzare le formule e le dimostrazioni che incontro tutti i giorni. (...) Per questo posso dire che il mio rapporto con la matematica è cambiato. (...) Oggi la considero un'arte ricchissima la cui bellezza però è difficile da cogliere senza ripercorrere interamente la sua storia. (...) Il confronto sulle dimostrazioni che ho avuto con gli altri elementi del mio gruppo e poi con tutta la classe è stato avvincente. Sono rimasta stupita che ci siamo fatti tutti coinvolgere.

45. Il periodo ellenistico

Il contesto storico all'interno del quale vive e opera Euclide è quello del periodo ellenistico, che segue le conquiste e il progetto imperiale di Alessandro Magno.

46. L'impero Alessandino

Alessandro Magno nasce nel 356 a. C. Nel 335 a. C. succede al padre, Filippo, assassinato in quello stesso anno, e porta a termine in soli dodici anni la conquista di un grande impero, che si estende dalla Grecia all'India.

Nel 331 a. C., fonda la città di Alessandria in Egitto con il proposito di farne il centro culturale dell'impero. Nel 323 a. C., alla morte di Alessandro, l'impero viene diviso tra i suoi generali. Segue un periodo di guerre furibonde (guerre dei Diàdochi) che vedono, in Egitto, l'affermarsi di Tolomeo I, amico di infanzia di Alessandro Magno, che dà inizio, nel 305 avanti Cristo, alla dinastia dei Tolomei, che regna fino al 30 a. C., con la regina Cleopatra.

47. La scienza alessandrina

Durante il periodo del suo regno (305 a. C. – 283 a. C.) Tolomeo I persegue in Egitto il sogno di Alessandro di creare un impero cosmopolita fondato sui valori della civiltà greca. Progetta la creazione di due importantissime istituzioni culturali: il museo e la biblioteca.

Il museo è un'istituzione ispirata all'accademia platonica e al liceo aristotelico ma ha caratteristiche peculiari che la rendono un pilastro della cultura dell'epoca. Presso il museo, vengono invitati a collaborare e ad insegnare i migliori studiosi delle varie discipline, provenienti da tutto il mondo ellenistico e molte nuove discipline scientifiche nascono proprio nel contesto alessandrino, dove la ricerca scientifica è tenuta in grande considerazione da Tolomeo I e da suo figlio Tolomeo II. I primi faraoni della dinastia tolemaica non vogliono solamente che l'attività scientifica conferisca prestigio alla città e all'impero, ma vogliono che abbia significative ricadute tecnologiche, per rendere possibili grandi opere pubbliche.

La Biblioteca, funzionale al museo, è la più grande dell'antichità. La sua distruzione, avvenuta in più riprese cancellò molte delle testimonianze della rivoluzione scientifica ellenistica.

Durante il regno di Tolomeo II (283 a. C. – 246 a. C.), oltre al completamento della Biblioteca e del Museo, il faraone diede un grande impulso alla costruzione di opere pubbliche, mai viste, che furono possibili anche grazie agli avanzamenti tecnologici prodotti dell'illuminata politica scientifica del padre. Ad esempio, fece costruire il faro di Alessandria e le installazioni che resero il porto di Alessandria il più importante del mediterraneo. Inoltre, finanziò la costruzione di grandiosi canali e dighe, per la realizzazione dei quali fu necessario sviluppare nuove tecnologie.

Ad Alessandria, venne anche dato un grande impulso alle attività mercantili e di conseguenza grandi investimenti nella ricerca relativa alle tecniche di navigazione, di misurazione del tempo, delle rappresentazioni cartografiche, ecc. Vennero progettate nuovi meccanismi quali pompe, carrucole, cunei, ingranaggi, che vanno di pari passo con lo sviluppo della meccanica teorica, della statica, dell'idrostatica e dell'idraulica. Alcune di queste teorie nacquero proprio ad Alessandria.

Si affermò l'approccio scientifico allo studio dell'anatomia, della fisiologia, dell'ottica, della botanica dell'agricoltura e delle loro applicazioni. Molte di queste scienze, erano già state considerate da Aristotele, ma senza alcun collegamento con le applicazioni.

L'approccio alla scienza fu rivoluzionato: la scienza di Aristotele è una scienza di pura deduzione, mentre la scienza ellenistica è molto diversa, anche se deve molto proprio ad Aristotele. Non dobbiamo dimenticare infatti che Aristotele compie una svolta di pensiero decisivo. Partendo dalla filosofia di Platone (idealismo astratto filosofico il cui scopo è raggiungere al sommo bene e Illuminare/spiegare tutto da esso), Aristotele imbocca una strada diversa, iniziando a considerare ogni scienza per sé ed ognuna con una sua propria dignità teorica indipendentemente dai suoi rapporti con il “sommo bene”. Aristotele si pose l'obiettivo di plasmare il linguaggio adatto alla costruzione di ogni singola scienza e indicò come costruire teorie solide e ben argomentate, studiando le regole generali per argomentare razionalmente e correttamente.

Nella costruzione del linguaggio di ogni scienza pose l'attenzione sull'importanza delle definizioni, dei concetti primitivi, degli assiomi e dei postulati. Aristotele fu il primo ad impiegare un approccio assiomatico in modo sistematico per la costruzione di una teoria scientifica ma mantenendo un collegamento troppo superficiale con la realtà e le applicazioni. Ad esempio, la scienza dell'agricoltura di Aristotele è una costruzione astratta che si appoggia su osservazioni empiriche qualitative e non sente il bisogno di confrontarsi con la misurazione di quello che succede nella realtà delle campagne e con la progettazione di interventi volti a modificare le tecniche agricole.

Nel periodo alessandrino, il primo periodo ellenistico, sono attivi scienziati di altissimo livello, per tanti secoli dimenticati. Ho riportato nella tabella seguente solo il nome di alcuni matematici. Per gli altri scienziati rimando ad un libro molto bello di Lucio Russo (Russo, La rivoluzione dimenticata 1996). In questo libro l'autore rivaluta il periodo culturale e scientifico alessandrino, che definisce come il periodo della “rivoluzione dimenticata”, per l'enorme sviluppo della scienza che purtroppo verrà quasi completamente annientata dall'espansione dell'Impero romano.

48. Alcuni matematici del periodo ellenistico

Primo periodo	Secondo periodo
Euclide (325 – 265 a.c.)	Menelao (I sec. a.c.)
Archimede (287 – 212 a.c.)	Erone (I sec. a.c.)
Apollonio (262 – 190 a.c.)	Tolomeo (85 d.c. – 165)
Eratostene (284 – 192 a.c.)	Diofanto (200 d.c. – 284)
Diocle (240 – 180 a.c.)	Pappo (290 d.c. – 350)
Zenodoro (200 – 140 a.c.)	Teone (335 d.c. – 360)
Nicodemo (circa 200 a.c.)	Ipazia (360 d.c. – 415)
Ipparco (190 – 120 a.c.)	Proclo (411 d.c. – 485)

Figura 3 – I grandi matematici del periodo ellenistico. La conquista romana nel 30 a.c. spezza in due il periodo ellenistico. Il secondo è decisamente meno brillante del primo. Le coordinate biografiche sono da intendersi puramente indicative.

49. Euclide e gli Elementi

Euclide e i suoi Elementi sono i protagonisti dell'ultimo tratto del percorso. Gli Elementi sono uno dei libri più importanti della storia della matematica ed è uno dei testi fondamentali della cultura occidentale.

L'oggetto degli Elementi è la teoria delle figure costruibilicon riga e compasso, che rivestono estrema importanza per la scienza antica. Spesso, infatti, il calcolo geometrico era più efficiente di quello numerico: l'aritmetica non era paragonabile per potenza alla precisione di calcolo alle costruzioni con riga e compasso. Quindi, per esempio, per progettare un meccanismo, il disegno preciso fatto sulla base della teoria del disegno con riga e compasso risultava essere non solo un modo per rappresentare l'oggetto ma anche un efficiente modello per calcolare l'adeguatezza di questo rispetto agli scopi per cui veniva costruito, cioè per fare della "progettazione scientifica". Il disegno veniva usato così per calcolare, per modellare e per progettare. La famosa frase tratta dal Il Saggiatore di Galileo Galilei evidenzia l'importanza della geometria di Euclide nello sviluppo della scienza, che permane almeno fino al periodo di Galilei:

> *La filosofia naturale [la fisica] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi [in contrasto con le credenze religiose del periodo, l'uomo può leggerlo, se ne è in grado, senza chiedere il*

permesso a nessuno], io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

50. L'ultima parte del percorso didattico

Nella figura vedete gli insegnanti e gli studenti di una classe che ha completato il percorso e che hanno esposto le riflessioni dal loro punto di vista in un seminario alla Sapienza.

51. Video e dialogo per Pitagora

Abbiamo detto la scorsa volta di come sia stato chiesto ai ragazzi, divisi in piccoli gruppi, di preparare un video sulla dimostrazione del teorema di Pitagora esposta in forma di dialogo, ispirandosi al Menone.

52. Scelta del video

La classe, dopo un approfondito confronto di ogni gruppo con gli insegnanti, e dopo un acceso dibattito argomentativo, sceglie il video da confrontare con la dimostrazione di Euclide.

53. Confronto con la dimostrazione di Euclide

Il confronto della dimostrazione preparata dalla classe con la dimostrazione di Euclide si è svolto in Sapienza. Ho preparato un dialogo per sintetizzare i contenuti e le riflessioni fatte con le classi durante questi confronti. Trovate il dialogo in fondo alle note. Potete partecipare a questo dialogo scrivendomi le vostre riflessioni a riguardo.

54. Sostituzione della dimostrazione di Euclide

Agli studenti è stato proposto di trasformare il dialogo argomentativo che accompagnava il loro filmato in una dimostrazione nello stile di Euclide, per apprezzare la difficoltà e il valore di questa trasformazione.

> *"La casa editrice degli Elementi di Euclide, Alexandria University Press intende bandire un concorso per sostituire la dimostrazione della proposizione 47, conosciuta come "Teorema di Pitagora". Le dimostrazioni proposte vanno inviate per e-mail al coordinatore dell'editorial board della casa editrice Alexandria University Press, euclide@unialexandria.el che le sottoporrà al vaglio scientifico secondo la procedura del referaggio a doppio cieco.*
>
> *Si richiede che lo stile e il linguaggio usato nella dimostrazione siano il più vicino possibile a quelli utilizzati nell'edizione UTET curata da Attilio Frajese, i cui diritti sono stati acquisiti da Alexandria University Press. La dimostrazione deve essere accompagnata da un disegno esplicativo ed eventualmente da un secondo disegno, ove gli autori lo ritenessero necessario. Anche i disegni devono essere preparati in conformità con quelli della citata edizione, preferibilmente con il software di geometria dinamica GeoGebra."*

55. Riflessione sul metodo euclideo

Al termine del percorso ho invitato i ragazzi a partecipare a un seminario in cui ho illustrato l'importanza del metodo euclideo rispetto agli schemi argomentativi utilizzati in precedenza e il valore culturale della dimostrazione euclidea, che trascende l'ambito prettamente matematico.

56. La dimostrazione di Euclide del Teorema di Pitagora

Come omaggio a Euclide e come modello di dimostrazione euclidea che puntiamo a comprendere nella sua novità e nella sua importanza confrontandola con le argomentazioni che i ragazzi che hanno seguito il percorso hanno sviluppato fin qui, riporto integralmente la dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora.

Step 1 Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto; dico che il quadrato di BC è uguale alla somma dei quadrati di BA, AC.

Step 2 Infatti, si descrivano il quadrato BDEC su BC, e su BA, AC i quadrati GB, HC (I,46),

Step 3 per A si conduca AL parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette BD, CE (I,31 e I,30)

Step 4 e si traccino le congiungenti AD, FC. Ora, poiché ciascuno dei due angoli BAC, BAG è retto, le due rette AC, AG, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta BA, formano con essa, e coi vertici nel punto A, angoli adiacenti la cui somma è uguale a due retti; quindi CA è in linea retta con AG (I,14). Per la stessa ragione, pure BA è in linea retta con AH (id.)

Step 5 E poiché l'angolo DBC è uguale all'angolo FBA - difatti ciascuno dei due è retto -, si aggiunga in comune ad essi l'angolo ABC; tutto quanto l'angolo DBA è quindi uguale a tutto quanto l'angolo FBC (noz. com. II). Ora, poiché DB è uguale a BC, e FB a BA (def. XXII), i due lati DB, BA sono uguali rispettivamente ai due lati FB, BC; e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC, per cui la base AD è uguale alla base FC, ed il triangolo ABD è uguale al triangolo FBC (I,4).

Step 6 Ma il parallelogrammo BL è il doppio del triangolo ABD - essi hanno difatti la stessa base BD e sono compresi tra le stesse parallele BD, AL (I,41) -,

Step 7 mentre il quadrato GB è il doppio del triangolo FBC: difatti essi hanno, di nuovo, la stessa base FB e sono compresi tra le stesse parallele FB, GC (I,41).

Step 8 [Ma doppi di cose uguali sono uguali fra loro (noz. com. V)]; è quindi uguale anche il parallelogrammo BL al quadrato GB.

Step 9 Similmente, tracciate le congiungenti AE, BK, si potrà dimostrare che pure il parallelogrammo CL è uguale al quadrato HC; tutto quanto il quadrato BDEC è perciò uguale alla somma dei due quadrati GB, HC (noz. com. II). Ed il quadrato BDEC è descritto su BC, mentre i quadrati GB, HC sono descritti su BA, AC. Quindi il quadrato del lato BC è uguale alla somma dei quadrati dei lati BA, AC.

Dunque, nei triangoli rettangoli ... (secondo l'enunciato). - C. D. D.

57. Le dipendenze nella dimostrazione di Euclide.

Organizzando in una struttura ad albero le proposizione utilizzate da Euclide nella dimostrazione del Teorema e quelle usate nella dimostrazione delle proposizioni utilizzate, possiamo vedere come la dimostrazione di Euclide si estende al contenuto dell'intero Libro I.

Nella preparazione delle loro proposte di dimostrazioni sostitutive del teorema di Pitagora è stato chiesto alla classe di costruire gli analoghi alberi per le loro dimostrazioni per percepire la struttura della rete di relazioni che lega le proposizione e ottimizzarla.

58. Il contributo di Euclide

Il contributo di Euclide alla matematica è immenso.Gli Elementi sono stati per duemila anni il più importante testo per l'insegnamento della matematica Fu ristampato in più di mille edizioni e costituisce uno dei testi più importanti della cultura occidentale, cui si sono ispirato filosofi e scienziati per millenni. Con Euclide nasce la matematica moderna, rigorosamente fondata sul metodo assiomatico.

Il contributo di Euclide è un passo in avanti epocale, non solo per la matematica, ma per l'intera storia della scienza. Le dimostrazioni pre - euclidee sono deduzioni di fatti non evidenti da fatti evidenti. Per esempio, la dimostrazione della duplicazione del quadrato riportata nel Menone riduce il problema ad affermazioni convincenti, che non si ritiene di dover ulteriormente dimostrare. Nelle dimostrazioni euclidee invece, tutte le proposizioni vanno dedotte da pochi fatti evidenti, fissati una volta per tutte, cioè *tutte* le dimostrazioni di una teoria vengono dedotte *dagli stessi* postulati. Anche se già prima di Euclide il percorso verso l'assiomatizzazione della geometria era già stato imboccato, il lavoro di Euclide è il primo che completa in maniera convincente questo percorso, tanto da essere preso a modello per quasi duemila anni.

Già Aristotele aveva sottolineato la necessità di fissare gli assiomi e poi dedurne logicamente e rigorosamente tutte le conseguenze. Aristotele però lo diceva in generale. Nella geometria non era ancora stato raggiunto un accordo su quali fossero i postulati e gli assiomi da cui partire. Euclide riesce a fissarli in maniera così convincente che per 2000 anni rimarranno gli stessi. Ci sono state numerosissime discussioni critiche su ognuno dei postulati fissati da Euclide, però l'impostazione è ancora la stessa che ha dato Euclide. La revisione critica dei fondamenti della geometria ha messo in evidenza, nel corso del XIX secolo, che Euclide aveva assunto tacitamente alcune proprietà che non seguono dai suoi assiomi e che era quindi necessario un completamento, ma non una revisione sostanziale. L'opera di Euclide è il modello di uno stile che è ancora lo stesso che viene impiegato nell'esposizione della matematica contemporanea. Euclide non si limita ad impiegarlo negli Elementi ma lo usa in tutte le sue opere, per esempio in quella sull'ottica.

Lo stesso stile di deduzione rigorosa da pochi assunti fondamentali viene utilizzato anche da Archimede, non solo nelle opere strettamente matematiche ma anche in quelle di statica e idrostatica, che potremmo qualificare "razionali" nello stesso senso in cui oggi si qualifica razionale la meccanica dei corsi universitari.

Il grande contributo di Euclide è quello di aver realizzare compiutamente l'ideale di scienza Aristotelica nel caso della geometria, cioè di aver sviluppato in maniera rigorosa e completa una teoria assiomatica e di averlo fatto in maniera utile anche alle applicazioni, anche se lo strumento logico utilizzato non è quello che aveva indicato Aristotele con la sua teoria del sillogismo.

Come osserva Lucio Russo in (Russo, Euclide 2016), una delle ragioni per cui è proprio Euclide a concepire un'opera così radicale è il fatto che Euclide lavora ad Alessandria. La città non è solo il centro scientifico del mondo ellenistico ma è anche, per la prima volta, un luogo dove il sapere può essere fissato, conservato e irradiato, grazie all'esistenza del Museo e della grande Biblioteca. È solo ad Alessandria che si può concepire l'idea di fissare un sapere scientifico universale e di poterlo condividere universalmente."

L'universalità è una caratteristica che noi attribuiamo naturalmente alla matematica ma non era affatto scontata in un mondo dove la condivisione della conoscenza era ben più difficile di oggi.

Ma perché è così necessario e così utile fissare gli assiomi di una teoria? Riflettiamo sul significato e sulla novità di questo fatto. Una dimostrazione come quella riportata nel Menone si interrompe quando arriva a fatti evidenti per i due interlocutori, senza che i matematici avvertano per secoli l'esigenza di ricondurla a un insieme di postulati fissati una volta per tutti e comune a tutte le proposizioni della geometria e accettati da tutti i matematici. Anche oggi, nessuno di noi si mette, quando deve dimostrare qualcosa, a percorrere tutta la strada che permette di dedurre quel qualcosa dagli assiomi, ma tutti sappiamo che ciò è possibile e sappiamo quali sono gli assiomi di una teoria, quindi ci sembra scontato che ci debbano essere e ci sembra ovvio che tutta la matematica possa essere sviluppata in maniera rigorosa e consequenziale secondo il modello euclideo. Ma prima di Euclide nessuno lo aveva mai fatto! Nessuno, almeno per quanto ci è dato sapere, era ancora riuscito a organizzare assiomaticamente una intera teoria in maniera completamente soddisfacente. È Euclide che per primo ci fa vedere, con tutti i dettagli e al di là di ogni dubbio, che l'intera geometria si può basare su 5 postulati e pochi assiomi (la critica moderna mostrerà che bisogna aggiungerne alcuni altri, che erano stati implicitamente assunti da Euclide, senza però modificare l'impianto dell'edificio). La cosa a mio avviso più sorprendente del lavoro di Euclide è che ancora oggi la struttura degli elementi resiste nella sostanza. Bisogna solo aggiungere qualcosa nelle fondamenta ma l'intero edificio si regge così come l'aveva immaginato e poi realizzato, Euclide.

> "La sequenza dei nostri teoremi sarà assai diversa da quella che si trova usualmente nei testi di geometria elementare. Risulterà però frequentemente la stessa che si trova negli Elementi di Euclide. Saremo così condotti dalle nostre indagini moderne ad apprezzare la penetrante visione di questo antico matematico e ad ammirarlo al massimo grado." *Hilbert*

Ma perché è così importante questo passo? Le ragioni matematiche sono abbastanza evidenti, ma le ragioni non sono solo matematiche. Una ragione almeno altrettanto importante è di carattere applicativo. Come ha messo bene in evidenza Lucio Russo in (Russo, La rivoluzione dimenticata 1996), (Russo, Stelle e velieri 2015) e (Russo, Euclide 2016), le teorie assiomatiche sono la premessa necessaria alla progettazione scientifica. Vediamo un esempio.

59. Teorie assiomatiche e progettazione scientifica: grandi navi

Il problema della costruzione di grandi navi si è presentato più volte nel corso dei secoli. Avere una flotta potente è condizione necessaria per esercitare il dominio sui mari e quindi costruire grandi navi è un obiettivo che è stato spesso perseguito dalle nazioni potenti al fine di ottenere una supremazia economica e militare. Nella prima metà del 1600 (tra il 1626 e il 1628) il re Gustavo di Svezia concepì l'idea di costruire la più grande nave dell'epoca per esercitare il dominio svedese sul mar Baltico e avere il controllo dei commerci. Fece costruire il galeone Vasa, che aveva una lunghezza di 69 metri. La nave fu varata nel 1628, dopo due anni di lavoro in cui era stato investita una quantità di soldi enorme, circa un quarto del prodotto interno lordo della Svezia. Il Vasa affondò il giorno del varo. Venne recuperato dopo 300 anni dalle acque del Baltico in perfetto stato di conservazione, per via della bassa salinità che contrasta lo sviluppo del microorganismo che fa solitamente marcire il legno delle navi affondate, ed è oggi esposto nel grande monumento alla stupidità degli svedesi (come dice l'amico svedese che mi ha portato a visitarlo), che hanno visto andare in fumo un quarto del loro prodotto interno lordo, facendo sostanzialmente la fame per un anno, perché la grande nave non era stata progettata bene. E perché non era stata progettata bene? Perché non faceva riferimento a una teoria che permettesse di calcolare con certezza se il progetto avrebbe portato alla costruzione di una nave che sarebbe stata in grado di galleggiare e di assolvere ai compiti per cui era stata progettata prima di costruirla. Il Vasa era stato costruito per analogia con navi che galleggiavano, semplicemente raddoppiando le dimensioni e sperando, così facendo, che sarebbe stato in grado di navigare. Si applicava semplicemente l'dea che aumentando le dimensioni e mantenendo le proporzioni si sarebbe costruita una nave perfettamente funzionante. Questa ipotesi invece, fondata su un'analogia e non su una teoria scientifica, si rivelò priva di fondamento.

60. Syracusia

Il Vasa è stata la nave più grande nave che per circa 2000 anni si fosse tentato di costruire, ma una nave ancor più grande era stata costruita in tempi più remoti e, secondo le fonti che ci sono giunte, sembra che questa nave fosse in grado di navigare senza problemi. Si trattava della nave Syracusia, progettata da Archimede per re Gerone II di Siracusa intorno al 240 a. C, che sembra avesse una lunghezza di 110 metri, quasi doppia rispetto a quella del Vasa.

61. Archimede: i galleggianti

Non è un caso che il progettista Siracusya sia anche l'autore di un'opera di idrostatica razionale, intitolata "I galleggianti". Quest'opera è organizzata come gli Elementi di Euclide. Si parte con definizioni i ed assiomi e si procede con rigore euclideo alla dimostrazione di ogni proposizione. La Siracusya non galleggiava per caso né per analogia ma perché Archimede aveva dimostrato che sarebbe stata in grado di galleggiare prima del varo.

Questo esempio illustra come la progettazione tecnologica, nel periodo alessandrino, possedeva gli stessi caratteri della progettazione scientifica moderna e che una delle ragioni del salto di qualità che rende possibile la progettazione scientifica sta proprio nell'organizzazione assiomatica di quelle parti della teoria che vengono utilizzate nella costruzione di un modello dell'oggetto tecnologico che si intende realizzare. In conseguenza di questa organizzazione, il comportamento di un oggetto che "verifica gli assiomi" può essere previsto teoricamente. Questo approccio ha un'enorme ricaduta tecnologica perché ci permette di garantire che un oggetto progettato scientificamente, funzioni correttamente e assolva agli scopi per cui è stato progettato anche quando dovrà funzionare in condizioni lontane da quelle testate e accessibili ad una sperimentazione diretta. Basti pensare alla progettazione delle macchine che hanno portato l'uomo sulla luna per rendersi conto della portata di questa rivoluzione. I progettisti delle missioni Apollo hanno seguito il metodo della progettazione scientifica di Archimede e non quello delle maestranze svedesi del Vasa!

La costruzione di una teoria scientifica assiomatica è condizione necessaria per la progettazione scientifica, ed è quindi la chiave per applicare la scienza alla tecnologia in maniera efficiente ed economicamente sostenibile.

In questo senso Euclide può essere considerato il padre della progettazione scientifica e con ciò si spiega l'importanza eccezionale della sua opera, ben oltre i suoi meriti matematici.

Gli Elementi di Euclide sono il primo libro della matematica greca che ci è stato tramandato per intero e la sua sopravvivenza è un indizio importante della sua importanza. La geometria di Euclide è la teoria dei disegni con riga e compasso. Oggi ci può apparire un argomento di interesse esclusivamente teorico e dalle applicazioni concrete insignificanti ma allora, e ancora fino a meno di un secolo fa, era un argomento estremamente importante anche dal punto di vista delle applicazioni della matematica. Se volessimo paragonare questo libro ad un libro contemporaneo, l'analogo sarebbe un libro che spiega la teoria che fa funzionare i computer, per esempio (Knuth 2011). Noi pensiamo al disegno con riga e compasso come a una cosa ben diversa dal calcolatore, ma dovremmo ricordare che il disegno tecnico è stato per secoli lo strumento fondamentale per la progettazione, come oggi lo è il calcolatore. Non a caso, i primi ingegneri moderni furono i pittori e gli architetti, cioè coloro che sapevano disegnare e che studiavano la geometria euclidea per imparare a rappresentare le scene tridimensionale su un quadro secondo la prospettiva corretta. Gli ingegneri fino agli inizi del 900 avevano proprio nel disegno tecnico uno dei due sussidi principali per la progettazione, l'altro era il calcolo, che, almeno fino alla scoperta dei logaritmi, era molto poco efficiente. Il calcolo scientifico sostituisce oggi il disegno tecnico perché abbiamo i calcolatori. Prima, risultava spesso più efficiente disegnare e progettare disegnando piuttosto che calcolare e progettare calcolando. Nei corsi di ingegneria si insegnava la geometria descrittiva e proiettiva come strumento fondamentale di progettazione. Sulla geometria proiettiva e descrittiva si basavano i corsi di statica grafica che fornivano gli strumenti per progettare ponti, macchinari, ecc.

Questa della possibilità di progettare un manufatto di cui è dimostrabile il funzionamento è un carattere molto specifico della teoria in base ai cui principi si costruisce il manufatto, che permette di qualificare come scienza tale teoria e fornisce quindi uno stato diverso, che è bene non confondere, alle altre discipline teoriche.

62. Perché la dimostrazione di Euclide è speciale?

Spero di avervi convinto che il metodo inaugurato da Euclide è di fondamentale importanza per la matematica e per la scienza e che valga quindi la pena conoscerlo anzi, come dice Lucio Russo, è una delle cose che a scuola val più la pena di insegnare.

Credo inoltre che, come abbiamo cercato di fare all'inizio di questo seminario, sia opportuno illustrare il metodo con alcuni teoremi fondamentali. Forse ne basta addirittura uno, quello di Pitagora, da conoscere ed apprezzare come si conosce una bella poesia.

Ma perché la dimostrazione di Euclide del teorema di Pitagora è così speciale, tra le centinaia che se ne possono immaginare?

Ho cercato di farlo dire ad Euclide stesso costruendo un dialogo di cui voglio leggervi un frammento. Un matematico di cui non si conosce il nome interpella Euclide sul conto di una diversa dimostrazione del teorema di Pitagora. Si tratta di un dialogo fittizio costruito con gli spunti raccolti dalle discussioni con gli insegnanti e gli studenti che hanno seguito il percorso. Potete partecipare inviandomi i vostri commenti e le vostre osservazioni.

63. Dialogo con Euclide sulla dimostrazione del Teorema di Pitagora

Anonimo Credo di aver scoperto la più semplice dimostrazione possibile del teorema di Pitagora.

Euclide Fa uso della teoria delle proporzioni?

Anonimo No, la teoria delle proporzioni è troppo complicata anche se, ho sentito, permette una dimostrazione semplice. La mia usa solo proprietà evidenti.

Euclide Cosa intendi per proprietà evidenti?

Anonimo Proprietà che chiunque conosce.

Euclide Intendi dire i cinque postulati che ho messo all'inizio degli Elementi?

Anonimo Intendo cose ancora più semplici, che ognuno conosce senza sforzo. Per esempio, non c'è bisogno del quinto postulato con la complicata formulazione che si trova negli Elementi.

Euclide Sono certo che sbagli. Il quinto postulato è necessario per dimostrare il teorema di Pitagora e te lo farò vedere, se vorrai mostrarmi la tua dimostrazione.

Anonimo Bene! Prendi un qualsiasi triangolo rettangolo.

Euclide Sei partito bene, almeno non hai preso un particolare triangolo, come fanno in molti. [[Per esempio, nel video in cui si parte da un triangolo in cui il segmento pari a un terzo del cateto minore è contenuto esattamente quattro volte nel cateto maggiore e cinque volte nell'ipotenusa.]]

Ma dimmi, come puoi costruire un triangolo rettangolo?

Anonimo Questo non fa parte del teorema.

Euclide Ma la sua costruibilità dipende da ipotesi. Se parti da un segmento, come puoi costruire la perpendicolare ad un suo estremo?

Anonimo Una perpendicolare esiste sempre.

Euclide E perché? Cos'è una perpendicolare?

Anonimo Una perpendicolare è una retta che forma con l'altra un angolo retto.

Euclide E cos'è un angolo retto?

Anonimo Un angolo di 90 gradi.

Euclide Non voglio insistere nel chiederti cosa sia un grado. Non ce n'è bisogno. Un angolo retto è un angolo il cui supplementare gli è congruente.

Anonimo Bene. Mi hai chiesto come dimostrare che esiste un angolo retto. Posso risponderti.

Euclide Ah si? E come?

Anonimo Prendi un segmento AB e prendi una semiretta $A \to C$. L'angolo tra la semiretta $A- \to B$ e la semiretta $A \to C$ può essere più grande o più piccolo del suo supplementare. Supponiamo che sia più grande. Facendo ruotare la semiretta $A \to C$ verso la semiretta $A \to B$, potrò farlo diventare più piccolo, fino a che il suo supplementare diventerà più grande. Ma allora ci sarà un momento in cui l'angolo sarà necessariamente uguale al suo supplementare.

Euclide Necessariamente in base a cosa? Di certo non segue dai miei postulati.

Anonimo Ma si tratta di una cosa molto intuitiva basata su un principio fondamentale che nessuno può contraddire.

Euclide Bene! Le cose intuitive che non seguono dai postulati vanno aggiunte a questi. In questo caso non è necessario.

Anonimo Ma così non arriveremo mai al punto. Dubitando di ogni cosa si finisce a fare come i filosofi, che non riescono mai a mettere un punto fermo su niente. I matematici invece, occupandosi di cose più concrete, possono accordarsi nel fermarsi a cose evidenti.

Euclide Hai ragione sul fatto che i matematici devono procedere diversamente dai filosofi, ma non sono d'accordo sul come. Vedo diversi problemi in quello che proponi di fare. Il primo è che non è evidente cosa sia evidente. Con quale criterio possiamo dire: questo è evidente? Una cosa evidente per me ora, potrebbe non esserlo per te, e magari, tra qualche anno, neppure più per me. Inoltre, per dimostrare la stessa cosa, possiamo ben seguire strade che giungono a collezioni diverse di ipotesi.

Anonimo Non mi sembra che ci sia niente di male in questo.

Euclide Quando si vuole costruire qualcosa è opportuno sapere prima di cosa hai bisogno. È molto seccante scoprire di non avere a disposizione il martello o la colla e dover interrompere quello che si sta facendo per andarli a cercare e magari dover rimandare il lavoro.

Anonimo Le ipotesi non sono come i martelli: non bisogna cercarle altrove.

Euclide Ma possono interrompere il lavoro. Pensa a quello che sta succedendo ora. Bisogna discutere per accertare se condividiamo le ipotesi evidenti che soddisfano entrambi, e poi dovremo fare lo stesso con Aristeo, che magari ci convince che un'ipotesi era falsa, e dobbiamo riunirci a ridiscuterne; mentre Menecmo, nel frattempo, ha già dimostrato qualcos'altro in conseguenza del nostro teorema e ci tocca capire se quello cha ha fatto regge ancora dopo la modifica che ci ha consigliato Aristeo oppure no. Insomma, un vero guazzabuglio.

Anonimo Quindi proponi di accordarci sulle ipotesi evidenti che siamo tutti disposti ad accettare?

Euclide È necessario.

Anonimo Ma come facciamo ad essere sicuri che siano sufficienti per dimostrare tutto quello che serve? E poi dobbiamo rifare le dimostrazioni di tutti teoremi che abbiamo dimostrato.

Euclide Questo è ciò che ho fatto negli Elementi, risistemando tutti i teoremi in maniera che quelli più usati (gli Elementi) siano rigorosamente dimostrati a partire dai postulati. Per sistemare ogni dimostrazione basta dedurla da quelle degli Elementi in maniera corretta, per essere certi che la struttura resti solida.

Anonimo Quindi alla fine cosa cambia, nelle dimostrazioni faremo sempre riferimento ad altre dimostrazioni che invece di "evidenti" potremo chiamare "già dimostrate".

Euclide La differenza è enorme. "Evidente" è una proprietà soggettiva e non mi permette di arrestarmi ad essa in maniera definitiva. "Già dimostrata a partire dai postulati" è invece una proprietà oggettiva.

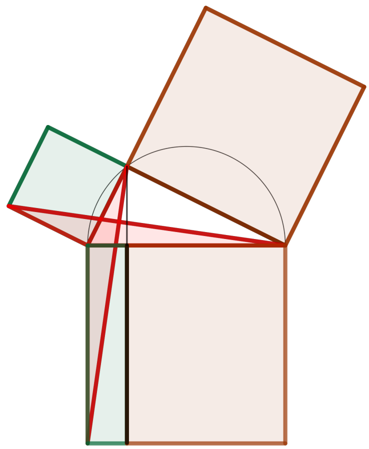
Anonimo Se chi l'ha dimostrata non ha fatto errori. Euclide. Giusto, ma il metodo è trasparente e permette il controllo degli errori. Se si dovesse aprire una falla, il sistema ci permetterebbe di circoscriverla.

Anonimo Mi sembra che la tua proposta però tolga il divertimento del fare matematica. La cosa che mi piace è discutere, usare il paradosso per confondere l'avversario, ritornare su cose che atri hanno accettato ma che possono essere riviste, scombinare catene di deduzioni per ricostruirne altre, ecc.

Euclide Non ti preoccupare di questo! La scoperta matematica continuerà a svolgersi sostanzialmente nello stesso modo, ma bisognerà preoccuparsi di organizzare le scoperte in maniera che sia esplicito il nesso con le cose già note per costruire un edificio in cui ogni mattone sia collocato dentro un'impalcatura solida e la costruzione non debba essere rifatta più volte o, peggio ancora, che non vengano fatte costruzioni simili usando procedure di costruzione incompatibili. [Questa lezione non è stata ben appresa. I costruttori di calcolatori hanno costruito macchine simili ma incompatibili e si è dovuto penare non poco per farle dialogare.]

Anonimo Prima che prosegua con la mia dimostrazione, posso rivedere la tua, per confrontarla.

Euclide Certamente.



[Euclide ripete la dimostrazione descritta in precedenza utilizzando le stesse parole.]

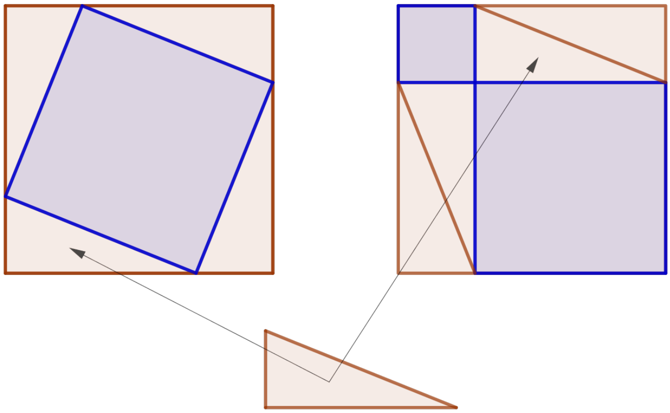
Anonimo Posso esporre la mia dimostrazione?

Euclide Certo, comincia.

Anonimo Eccola

> *Prendi un quadrato di lato uguale alla somma dei due cateti e costruiscici dentro un quadrato di lato uguale all'ipotenusa, come in figura. Restano quattro triangoli rettangoli congruenti a quello di partenza. Nello stesso quadrato di lato uguale alla uguale alla somma di due cateti, costruisci dentro, come in figura, un quadrato di lato uguale al primo cateto e un quadrato di lato uguale al secondo. Restano ancora quattro triangoli rettangoli uguali a quello di partenza. Quindi, poiché il quadrato costruito sulla somma dei due cateti meno quattro triangoli rettangoli è uguale sia al quadrato costruito sull'ipotenusa, sia alla somma dei quadrati costruita sui cateti,*

essi sono uguali tra loro. Come dovevasi dimostrare.



Questa dimostrazione è più semplice della tua. È più concisa e più evidente. Che ne pensi?

Euclide Il tuo argomento è interessante. Lasciami dire però che non è appropriato confrontarne la concisione con la dimostrazione che ti ho fatto vedere in precedenza.

Anonimo Stai provando ad arrampicarti sugli specchi. La tua è lunga 25 righe, la mia 7. Non c'è storia.

Euclide Ma la tua non è una dimostrazione nello stesso senso della mia, infatti l'ho qualificata come argomentazione. Fammi esporre un'analoga argomentazione concisa, tratta dalla mia dimostrazione, per convincerti della differenza.

> *Costruisci i quadrati sui lati del triangolo, come in figura e abbassa la perpendicolare all'ipotenusa dal vertice opposto, prolungandola come in figura. I due triangoli rossi sono congruenti. Il primo è il doppio del quadrato, il secondo è il doppio del rettangolo segnato in verde. Analogamente, il quadrato marrone sul secondo cateto è uguale alla parte marrone del quadrato sull'ipotenusa. Sommando, risulta il teorema.*

Questa argomentazione è più concisa della tua.

Anonimo Ma molto meno evidente!!

Euclide Il mio scopo non era costruirne una più evidente ma convincerti che le nostre erano dimostrazioni in senso diverso,

Anonimo In che senso?

Euclide Nel senso che la mia è costruita in modo da inserirsi perfettamente nella struttura degli Elementi (come illustrato nell'albero della dimostrazione). La tua no. Per confrontarle dobbiamo metterle sullo stesso piano.

Sul piano dell'argomentazione diciamo che sono ugualmente concise (nota però che la sua ha bisogno di due disegni), ma è per te più evidente.

Ma l'"evidenza", l'abbiamo già osservato, è un fatto relativo. Cosa non ti risulta evidente nella mia? Il fatto che alcuni passaggi non ti sembrano ovvi o non li vedi nella figura? Per esempio, il fatto che il triangolo rosso è metà del rettangolo verde? Se sei più o meno abituato a riconoscere questa relazione in una figura, lo troverai più o meno evidente, ma come vedi si tratta di un fatto soggettivo e non di un fatto oggettivo.

D'altra parte, quello che vedi nella figura, va sempre considerato con cautela. Perché il quadrato che costruisci nella prima delle figure nella tua dimostrazione è inscritto nel quadrato di lato a più b?

Per ottenere una dimostrazione confrontabile con quella che ho proposto negli Elementi dobbiamo collegare tutti i fili della nostra argomentazione alla trama degli elementi della costruzione, senza dar nulla per scontato se non quello che ha già trovato il suo posto nell'edificio.

Anonimo Questa matematica mi piace poco. Uccide le cose semplici per renderle complicate. Soffoca la curiosità e la fantasia con un sacco di cavilli.

Euclide Crea invece nuove opportunità alla fantasia. Offrendogli uno strumento potente di controllo gli permette di immaginare "nuovi mondi creati dal nulla", almeno altrettanto interessanti del mondo euclideo. Mondi per esempio in cui ci sono triangoli e quadrati ma in cui non vale il teorema di Pitagora, almeno non nella formulazione che conosciamo.

Anonimo Continuo a credere che la mia dimostrazione sia migliore della tua. Mi hai convinto che si debba riscrivere in tutti i dettagli e con riferimento alle proposizioni degli Elementi, ma una volta fatto questo lavoro, dovrebbe prendere il posto della tua, perché a tutti quelli che la racconto sembra più evidente e tale rimarrà, ne sono convinto, anche dopo averla completata.

Euclide Anche io credo che si possa trasformare la tua argomentazione in una dimostrazione più semplice.

Anonimo Facciamolo allora!!

Euclide Va bene, ma prima permettimi di spiegarti perché anche una dimostrazione più semplice non mi convincerà tanto facilmente a sostituire la mia.

Anonimo Cosa hai intenzione di inventarti questa volta? Non è che sei solo un po' presuntuoso?

Euclide La mia dimostrazione non dimostra solo che il quadrato sull'ipotenusa è uguale ai quadrati sui cateti, ma anche che il quadrato su un cateto è uguale al rettangolo costruito sull'ipotenusa e sulla proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa. Questo teorema prende il nome di Primo Teorema di Euclide.

In sostanza la mia dimostrazione riduce il teorema di Pitagora a un corollario del primo teorema di Euclide.

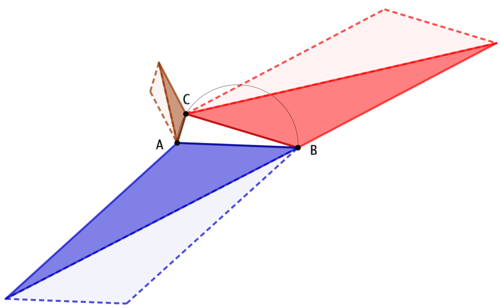
Anonimo Mi sbagliavo, non sei un po', ma mooolto presuntuoso.

Euclide Può darsi, ma non è questo il punto! Il punto è che abbiamo un teorema più generale, che ha la sua utilità indipendente e che ci suggerisce nuove ricerche e nuove scoperte.

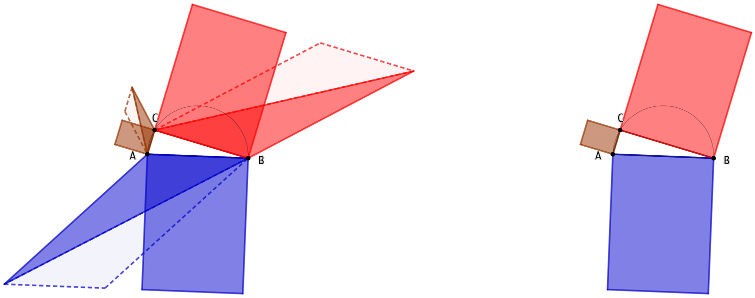
Anonimo Ah si, e quali?

Euclide Eccone una

> *Si considerino tre triangoli costruiti sui cateti e sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che abbiamo angoli ordinatamente uguali. Allora il triangolo costruito sull'ipotenusa è somma dei triangoli costruiti sui cateti.*



La mia dimostrazione del teorema di Pitagora suggerisce la dimostrazione di questo caso più generale. Si sostituiscano ai tre triangoli tre rettangoli equivalenti ai precedenti costruiti sui lati del triangolo. Vogliamo dimostrare che la somma dei rettangoli costruiti sui cateti è uguale a quello costruito sull'ipotenusa.



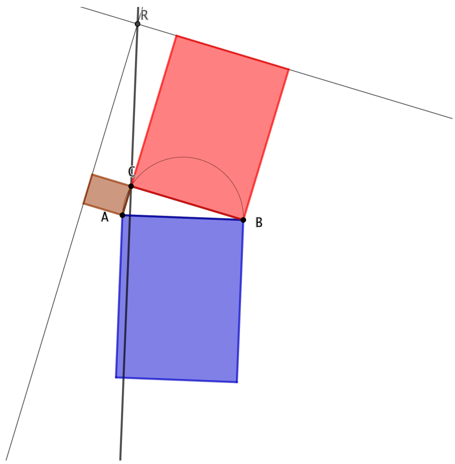
Anonimo Il teorema vale per ogni rettangolo?

Euclide No, solo quando sono legati in maniera particolare. Solo se sono simili. Questo è quello che succede in questo caso.

Anonimo E non potevi enunciarlo in questa forma?

Euclide No perché fa riferimento a una relazione più complessa che non è necessaria nel nostro contesto, la relazione di similitudine.

Proseguiamo la dimostrazione. Tracciamo da C la perpendicolare ad AB e prolunghiamola fino all'intersezione dei prolungamenti dei lati dei rettangoli costruiti sui cateti, paralleli ai cateti stessi.



Anonimo E chi mi garantisce che il prolungamento passi per il punto di intersezione.

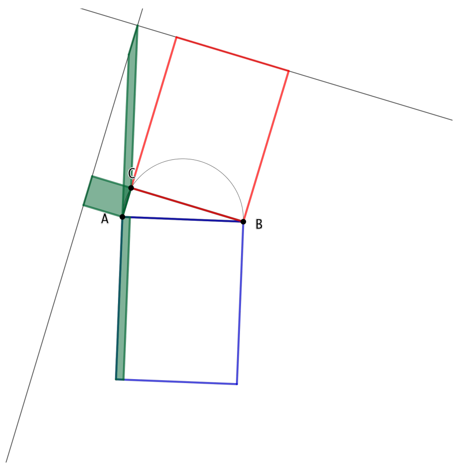
Euclide Bene, va dimostrato. Lasciami però concludere l'argomento.

Anonimo Anche tu argomenti senza dimostrare. Predichi bene ma razzoli male.

Euclide La logica della scoperta matematica non è quella dell'esposizione.

Alla fine, sarà necessario completare la dimostrazione ma, intanto voglio indicarti perché questo argomento è ispirato dalla mia dimostrazione del teorema di Pitagora.

Vedi, il rettangolo verde è uguale al parallelogramma perché hanno una base e le altre sulla stessa parallela alla base. Anche il parallelogramma e il rettangolo sono uguali. Qui serve dimostrare che i lati maggiori sono congruenti. Non è banale, ma il punto era solo quello di farti vedere come la mia dimostrazione del teorema di Pitagora è tale da suggerire, o almeno a me ha suggerito, un nuovo risultato.



Anonimo La ragione della tua preferenza però non è oggettiva. Come puoi tu sapere che anche con il io approccio non riesca ad arrivare allo stesso risultato.

Euclide Su questo ti do ragione: non lo so.

Ma finché non lo so, non vedo ragione per cambiare la mia scelta

Anonimo Bene, possiamo completare la dimostrazione del mio argomento, a questo punto.

Euclide Un'altra volta, ormai è tardi e sono stanco.

Anonimo Ok, grazie per la chiacchierata.

Continuerò a proporre il mio argomento a chi vuole capire perché vale Pitagora, ma suggerirò di leggere la tua dimostrazione per apprezzare la tua costruzione assiomatica.

Confesso che la ritenevo un'inutile perdita di tempo, inventata allo scopo di complicare le cose semplici, mentre invece è un sistema necessario di controllo per garantire il progresso della matematica.

Inoltre, m'intriga l'idea di usare questo approccio per immaginare, costruire e studiare nuovi mondi dal nulla o anche, più semplicemente, per gettare nuovi sguardi e cercare nuovi risultati sul mondo euclideo.