

*Sia benedetto questo errore!*  
Congetture e dimostrazioni in matematica  
tra ricerca e didattica

Claudio Fontanari

<http://www.science.unitn.it/~fontanar/>

Associazione Culturale "Antonio Rosmini" - Trento -  
Come combattere le *fake news*.  
Educare alla razionalità e alla dimostrazione

## Massimo Mila

*Ricordo di Augusto Monti.* Appendice al libro "I Sansossì" di Augusto Monti, Edizioni Araba Fenice, Cuneo, 1993.

Si capitava sotto la sua ferula finito il ginnasio, tra i 14 ed i 16 anni, un groppo indistinto d'aspirazioni confuse e d'inclinazioni malsicure, ed egli in tre anni quel gnocchetto di materia umana ancor tutta malleabile te lo formava e ti sortiva di là, da quel liceo, ch'eri un piccolo uomo, con la tua via davanti, con le tue convinzioni, con la tua bussola, armato e pronto per il viaggio. (...) Gli capitavamo tra le mani, dunque, appena emessi dal ginnasio, e lì per lì ci sbigottiva con la severità soldatesca dei modi e la fiera del cipiglio dietro le lenti spesse da miope: un volto duro, tormentato, scavato da rughe profonde, un volto da "riformatore", da persona a cui non piace il mondo così com'è, ma non ha nessuna intenzione di limitarsi a deplorazioni e piagnistei, bensì, a questo mondo, è fermamente decisa a cambiar la faccia. (...)

La scuola di Monti non tardava ad aprirsi in due settori ben distinti: le ore in cui "interrogava", ed erano per i più - e pure per lui - l'inferno, che non si sapeva mai cosa diavolo volesse, certe domande ti faceva che nessun libro ne forniva la risposta, e se tu recitavi appuntino la lezione - biografia dell'autore, elenco delle opere e "giudizio" - lui ti ascoltava con una faccia come se gli stessi narrando di sua madre le peggiori infamie, e poi magari ti concedeva il sei, la sospirata sufficienza, ma con un sospiro di sopportazione, che tanto valeva ti dicesse in faccia quello che pensava: che sangue da una rapa non se ne può cavare.

Ma c'erano, e ben più numerose, le ore in cui Monti "spiegava": ed erano il paradiso. La lezione culminava sempre nella lettura del testo; inquadramento storico, analisi stilistica, commento critico e spiegazione letterale dei passi difficili, tutto era semplicemente un aprire la strada e rimuovere ostacoli, perché avvenisse, alla fine della lezione, l'epifania, perché la lettura facesse la prova del nove di tutto quanto era stato spiegato, e quelle pagine che fino a poco prima t'erano parse magari nient'altro che un noioso vecchiume, si animassero meravigliosamente vive, giovani, ilari, entusiasmanti. (...)

Monti a legger Dante, Boccaccio, Machiavelli, Ariosto, Manzoni: che teatro! Quell'uomo così arcigno, all'aspetto, si faceva presto a scoprire ch'era l'uomo più divertente della terra, e c'era davvero chi, malato, si alzava da letto per non perdere l'ora in cui Monti spiegava e leggeva il settimanale canto di Dante. Quella scoperta dei classici, che in genere si fa per conto proprio dieci, venti, trent'anni dopo la scuola, quando d'essere un arnese di scuola i classici, appunto, hanno cessato, Monti te la faceva far lì, seduta stante, con un insegnamento che ripristinava la vita in tutte quelle cose che la scuola tende a imbalsamare. (...)

E guai se in classe, nell'ora di italiano, quando "spiegava", Monti cogliesse qualche sgobbone che, la testa china sul banco, vergando all'impazzata la matita su un foglio, cercasse di quelle meravigliose spiegazioni, di fermare qualcosa per iscritto.

- Cosa fai, tu? cosa scrivi?
- Prendevo appunti?
- Porta qua.

Tric, trac, il foglio lacerato sulla faccia, i pezzi nel cestino, e il solito sermone, duro, severo, che se l'avesse sorpreso a giocare a tre sette col compagno di banco, non sarebbe stato tanto: - Non son cose da imparare a memoria, queste. Apri le orecchie. E il cervello, se l'hai. Poi rileggiti il testo, e ascolta quello che dice. Non c'è altro. Torna a posto.

Ed era tutto così, a quella scuola, tutto ottenuto per vie che parevano indirette, e non erano. Tutto la negazione di quella bestialissima, fra le più bestiali invenzioni moderne, che è la propaganda. Antifascismo involontario. (...) Tu uscivi, da quel liceo, che manco sapevi qual governo ci fosse nel tuo paese. Ma tanti piccoli Brutti, si usciva, tanti odiatori di tiranni, e pronti a mordere, ad azzannare, ed abili, alla prima occhiata che si desse fuor del nido, a riconoscere subito il marcio dove stava, e incapaci di chiuderci un occhio e farci l'abitudine. Macché: scomodi, duri, angolosi, tutto prender di petto, compromessi niente, "pensa a' famiglia" niente, "e chi te lo fa fa" niente.

## John Aubrey

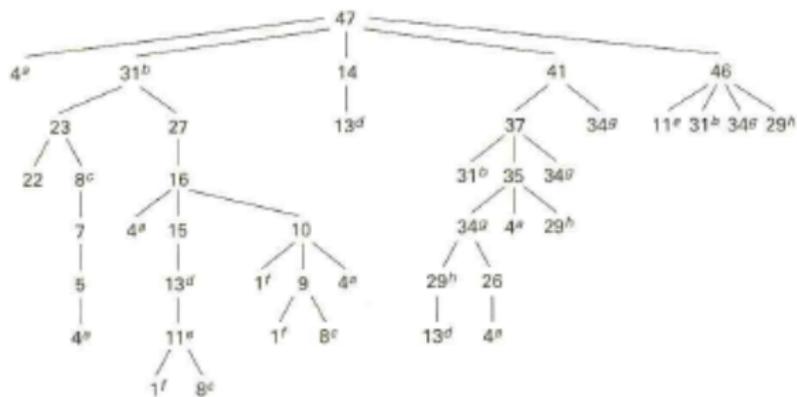
*The Life of Thomas Hobbes*. In: *Brief Lives*. Penguin Classics, New York (2000), pp. 427-428.

He was forty yeares old before he looked on geometry, which happened accidentally, being in a gentleman's library in ..., Euclid's Elements lay open, and 'twas the 47th Element liber I. He read the proposition. 'By God,' sayd he, 'this is impossible!' So he reads the demonstration of it, which referred him back to such a proposition: which proposition he read: that referred him back to another, which he also read, and sic deinceps [slowly but surely], that at last he was demonstratively convinced of that trueth. This made him in love with geometry.

Piergiorgio Odifreddi

*Divertimento geometrico*. Bollati Boringhieri, Torino, 2003, pp. 33–50.

Il libro I degli Elementi di Euclide si apre con una lista di definizioni, assiomi e postulati, procede con una lista di proposizioni, e si conclude con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo inverso. Noi lo rileggeremo al contrario: partendo, cioè, dalla dimostrazione del teorema di Pitagora, risalendo all'indietro in un processo di progressiva riduzione a proposizioni via via più elementari, e arrivando infine a scoprire gli assiomi e i postulati.



## Simone Weil

*Riflessione sul buon uso degli studi scolastici.* In: "Attesa di Dio", Adelphi 2008, pp. 191–201.

Il vero obiettivo e l'interesse pressoché unico degli studi è quello di formare la facoltà dell'attenzione, anche se oggi pare lo si ignori. La maggior parte degli esercizi scolastici hanno anche un certo interesse intrinseco, ma è un interesse secondario. Tutti gli esercizi che esigono davvero il potere d'attenzione sono interessanti a pari titolo e in misura quasi uguale. (...)

Il fatto di non possedere né il dono né l'inclinazione naturale per la geometria non impedisce che la ricerca della soluzione di un problema o lo studio di una dimostrazione sviluppi l'attenzione. Anzi, è quasi il contrario. È quasi una circostanza favorevole.

E poco importa che si trovi la soluzione o si afferri la dimostrazione, purché ci si sforzi davvero per riuscirci. Infatti mai, in nessun modo, un autentico sforzo di attenzione viene disperso. Sul piano spirituale è sempre pienamente efficace, e di conseguenza lo è anche, per di più, sul piano inferiore dell'intelligenza, giacché la luce spirituale rischiarava sempre l'intelligenza.

Se con vera attenzione si cerca di risolvere un problema di geometria e in capo a un'ora si è al punto di partenza, in ogni minuto di quell'ora si è comunque compiuto un progresso in un'altra dimensione più misteriosa. Senza che lo si avverta o lo si sappia, quello sforzo in apparenza sterile e infruttuoso ha portato più luce nell'anima. Un giorno se ne ritroverà il frutto (...) in un qualsiasi ambito dell'intelligenza, magari del tutto estraneo alla matematica. Colui che così si è applicato riuscirà forse, proprio grazie al suo sforzo inefficace, a cogliere in modo più diretto la bellezza di un verso di Racine. (...)

L'attenzione consiste nel sospendere il proprio pensiero, nel lasciarlo disponibile, vuoto e permeabile all'oggetto, nel mantenere in se stessi, in prossimità del pensiero ma a un livello inferiore, e senza che vi sia contatto, le diverse conoscenze acquisite che si è costretti a utilizzare. Nei confronti di tutti i pensieri particolari già formati, il pensiero deve essere come un uomo in cima a una montagna che, guardando davanti a sé, al tempo stesso percepisce, pur senza guardarle, molte foreste e pianure sottostanti. E soprattutto il pensiero dev'essere vuoto, in attesa, non deve cercare alcunché, ma essere pronto ad accogliere nella sua nuda verità l'oggetto che sta per penetrarvi.

Gli spropositi in una versione, le assurdità nella risoluzione di un problema di geometria, le goffaggini stilistiche e la mancanza di coerenza logica nei compiti di francese, tutto questo deriva dalla fretta con cui il pensiero si è precipitato su qualcosa: ed essendosi così colmato prematuramente, non è stato più disponibile per la verità. La causa risiede sempre nel voler essere attivi, nella volontà di cercare. Per verificarlo basta andare sempre alla radice di ogni errore. Non c'è esercizio migliore di questa verifica. Perché è una di quelle verità cui si può credere soltanto dopo cento, mille conferme. Accade così per tutte le verità essenziali. I beni più preziosi non devono essere cercati, bensì attesi. Giacché l'uomo non può trovarli con le proprie forze, e se li cerca troverà al loro posto quei falsi beni di cui non saprà discernere la falsità. (...)

Per ogni esercizio scolastico c'è una maniera specifica di attendere la verità con desiderio e senza permettersi di cercarla. Una maniera di prestare attenzione ai dati di un problema geometrico senza cercarne la soluzione, alle parole di un testo latino o greco senza cercarne il senso; una maniera di attendere, quando si scrive, che la parola giusta venga a porsi da sé sotto la penna scartando semplicemente le parole inadeguate.

## Emma Castelnuovo

*È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica?*

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22 (1967),  
n. 4, pp. 539–549, digitalizzazione disponibile in rete al sito:

<http://www.bdim.eu/>

[item?fmt=pdf&id=BUMI\\_1967\\_3\\_22\\_4\\_539\\_0](http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_1967_3_22_4_539_0)

Le generazioni di allievi si moltiplicano, a triennio succede triennio. Cambiano le mode, si evolvono i costumi; i bambini di 11 anni che riceviamo oggi alla scuola media sono ben diversi da come eravamo noi a quell'età (...) Eppure, ad una serie di questioni di geometria e di aritmetica che si presentano nei primi giorni di scuola vengono date le stesse risposte oggi come ieri, dai bimbi di città come da quelli di campagna, dai figli di professionisti come da quelli di famiglie che non hanno una tradizione culturale. (...) Non vedono che se uno spago legato viene tenuto a mo' di rettangolo fra l'indice e il pollice delle due mani, avvicinando e allontanando le dita di una stessa mano l'area cambia, e sostengono anche qui che l'area non può cambiare perchè il perimetro è sempre lo stesso, e avvalorano questa tesi dicendo che se diminuisce l'altezza del rettangolo aumenta la base e quindi le dimensioni si compensano.



Perché affermano cose assurde mentre si comportano da adulti in questioni della vita d'ogni giorno ben più complesse? Perché non vedono? In alcuni di questi problemi si tratta, in fondo, solo di guardare un oggetto. Eppure non c'è mai stata un'epoca come l'attuale in cui il senso della vista sia tanto esercitato; sappiamo benissimo quale attrazione esercitino i fumetti e la televisione. Ma, facciamo un esempio di tutti i tempi: un bambino, fin dalla più tenera età, non si stanca di osservare un mulino che ruota sotto la spinta dell'acqua, o una gru che sale e scende. È vero, ma un mulino fermo non gli interessa più e nulla gli dice una gru che non è in azione.

Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché "non sanno vedere". Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che (...) il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi "limite" parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal "saper vedere" un concreto dinamico, costruttivo.

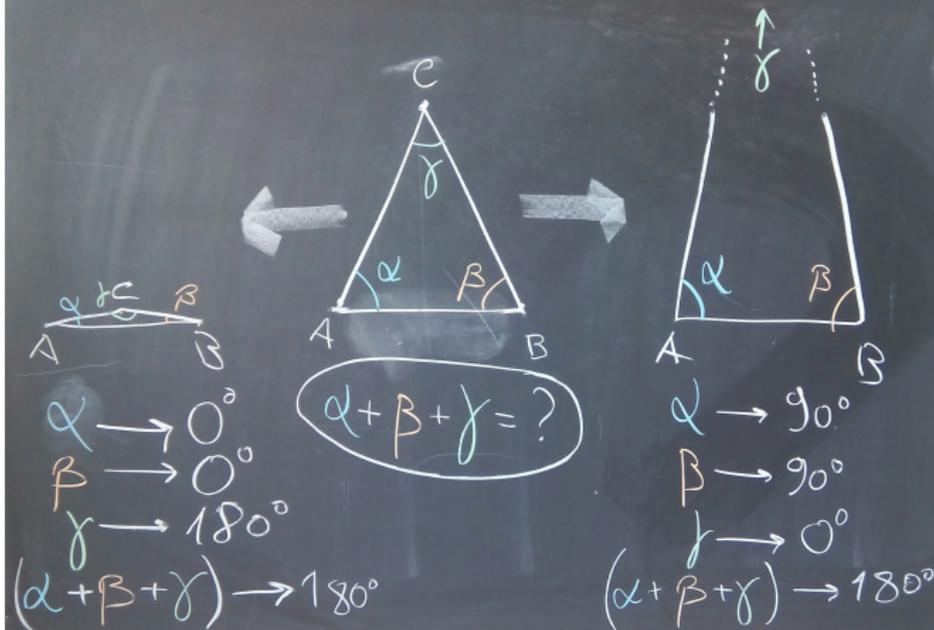
## Emma Castelnuovo

*L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. Il materiale per l'insegnamento della matematica*, La Nuova Italia Editrice, Firenze 1965, pp. 41– 65.

Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico del termine occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili.

(...) Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. (...) Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che – si è sempre portati, anche con una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante – quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, qual è questo valore costante? I casi limite conducono a intuire questo valore. (...)

# SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI IN UN TRIANGOLO



È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.